昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2013年11月1日発行　第51巻11号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

11
2013

特集 理論物理と実験物理の交錯

刺激しあい発展する姿に迫る



No.605

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 605 November 2013

理論物理と実験物理の交錯

刺激しあい発展する姿に迫る

表紙：戸川 隼人

MATHEMATICAL SCIENCES
November 2013 Number 605

特集／理論物理と実験物理の交錯

巻頭言

橋本 幸士

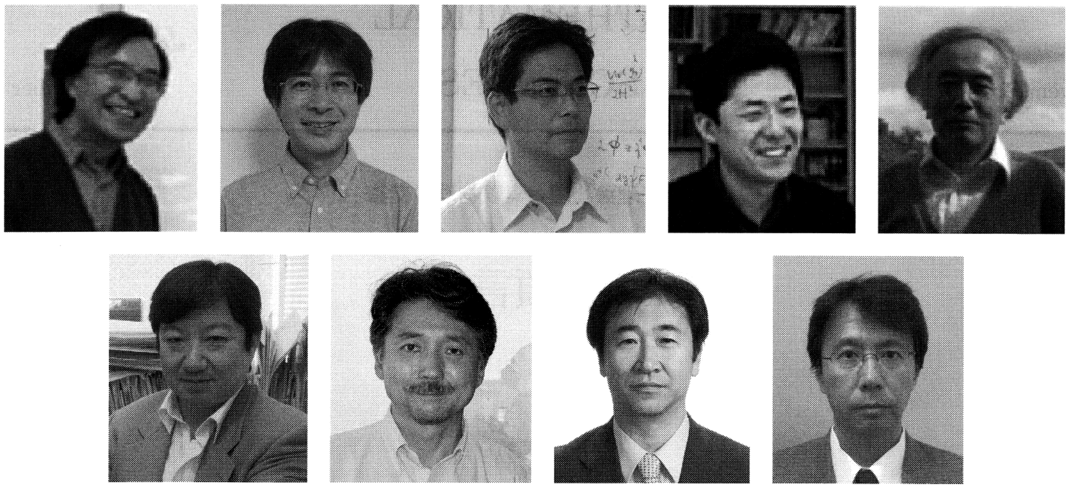
物理学者には「理論屋」と「実験屋」が居る．屋号を名乗るのは，八百屋や本屋のように扱う対象を名乗ることでアイデンティティを保つことに資するからであろう．商店街が八百屋と本屋の両方で成立する例を挙げるまでもなく，物理学において理論と実験は，科学を成立させる必須要素である．車の両輪にも例えられる「理論」と「実験」は，それらが相まって一緒に回るからこそ科学が加速し進展するのである．

しかし，科学が国家の隆盛の基礎を築くことが認識されたこの二世紀で，科学コミュニティは国の守護のもとに肥大し，科学は細分化され，また巨大化した．結果として，理論と実験の交錯は，様々な様相を呈することとなってしまった．ある分野は実験が困難なために理論の独壇場となった．ある分野は実験が新発見を続出させ，理論の追随を許さなくなった．また，ある分野は，理論と実験が手をつなぎ合って，爆発的に進展している．

これらの状況は，それぞれの科学分野の隆興を示唆しているだけではない．じつは，ある一時代のタイムスライスを垣間見てもいるのである．数世紀もの長い積み重ねの上に成立している現代科学が呈する，分野ごとの色とりどりの現況は，実験と理論それぞれの長いタイムラインが互いに交錯しもつれあうようすの，ある瞬間の切り口を見ているのである．二本のひもがもつれ合うとき，互いに離れている場所もあれば，複雑に絡み合って結び目になることもある．時代によって，理論と実験は様々な距離を持つ．それが豊かな相乗効果を生み出すのであろう．

本特集は，切り口であるタイムスライスと，その歴史的なタイムラインを，理論物理と実験物理の交錯の観点から眺めていただくために組まれている．物理学のトピックを採り上げるのではなく，むしろ幅広い物理学のそれぞれにおいて理論と実験の観点から科学がいかに織り上げられてきたかを見てゆく，という新しい試みの特集である．素粒子物理学，物性物理学，重力波の物理学，のそれぞれの分野は，理論と実験の関係において非常に特色のある現況をさらしている．本特集では，まずはその三分野において，理論屋と実験屋のそれぞれの立場から，理論物理と実験物理の交錯を語っていただく．

素粒子物理学では，萩原薫氏（素粒子理論）が，ご自身の半生に重ね，この半世紀の理論の進展，特に素粒子の標準模型の成立とそれを超える物理について理論屋の観点から実験屋との交流を詳述している．駒宮幸男氏（素粒子実験）は痛快に，実験屋がいかに理論屋と戦いそして付き合いながら，新素粒子の発見を成し遂げてきたかを語っている．物性物理学では，古崎昭氏（物性理論）が，近年爆発的に進展を遂げているトポロジカル物質の理論的構築について詳述し，また安藤陽一氏（物性実験）は，超伝導の発見の歴史を振り返りながら新規物質の開拓に実験が理論とどう交錯してきたかを実験屋の視点から伝えてくれている．重力波



本特集の執筆者の顔ぶれ．上段：理論屋の萩原薫氏，古崎昭氏，田中貴浩氏，夏梅誠氏，藤川和男氏．下段：実験屋の駒宮幸男氏，安藤陽一氏，梶田隆章氏，田越秀行氏．

はその理論的予言からおよそ一世紀が経ち，ついに直接観測の一歩手前までやってきた緊張の時期にある．田中貴浩氏（重力理論）の文により総括された重力波物理学の理論的な予言は，日本の重力波天文台 KAGRA 始動により今後どんな展開を見せるのか，梶田隆章氏と田越秀行氏（重力観測）がその大きな期待を，重力波の物理学の歴史的な観点も含めて述べている．

それぞれの分野での歴史と現状をその専門家から詳しく聞くことは大変楽しいものであるが，一方で，理論屋と実験屋がそれぞれの分野の発展をどう眺めているのか，その違いや共通点を探しながら読むのも本特集の楽しみ方である．科学は単に理論と実験の二本のひもの絡み合いだけではなく，そのひもはよくよく見ると，たくさんの物理学者個人の世界線が大量に絡み合って形成されているのである．本特集では，実験屋が理論屋をどう感じながら科学を進めているのか，個人的なエピソードも語っていただいたので，科学者個人の人生も重ねながら読んでいただきたい．

歴史をひもとくと，科学は，全く期待されていなかった革命的な発見で爆発的に進展する．理論的な予言が先行することもあれば，全く理論的な裏付けが無い実験的新発見が革命を起こすこともある．本特集でも，ヒッグス粒子の発見のように幾千の理論的予言を長刀でごっそり殺してしまう革命や，高温超伝導体の予期せぬ発見の革命などいくつものエピソードが登場する．私的な話になるが，超弦理論の研究者である私は，実験的なコンタクトを断ってきた超弦理論が，近年は変貌し QCD や強相関電子系などの実験と綿密な絡み合いが起こっていることをとても嬉しく思っている．本特集の最後を飾るのは，夏梅誠氏による超弦理論の実験観測とのコンタクトについての「期待されていなかった革命」のドラマの話と，藤川和男氏による，半世紀以上にわたり実験的検証と理論的な構築が行き来するハイゼンベルグの不等式の物理学の歴史と進展，である．いずれも，長い間の理論的進展がもたらした現在の興味深い状況について，興奮を伝えてくれている．

理論と実験の両方をその手で采配する物理学者は，既にこの世から絶滅してしまったかもしれない．しかし，理論屋と実験屋が織りなす物理学の進展は，これからも，全く予期しない物理を生み出すであろうことは疑いない．物理学の理論と実験の長い歴史を振り返らせてくれる本特集は，まさにそれを感じさせてくれる．理論物理と実験物理の交錯，そして理論屋と実験屋の世界線の交錯を詳述して下さった執筆者の皆さまに感謝したい．そして，読者の皆さんが本特集をご覧になり，新しい物理学への期待と興奮を感じて下されば，本望である．

（はしもと・こうじ，大阪大学大学院理学研究科）

素粒子標準理論の興隆と黄昏

萩原　薫

自然科学の理論体系は，既知の実験事実を矛盾なく説明し，また未知の実験結果を予言する．新しい実験による検証が積み重なることによって，理論の普遍性に対する信頼が高まる．一方，実験結果が理論の予想と矛盾した場合には，その実験事実を説明し，且つ既知の全ての実験事実とも矛盾しない新しい理論が必要とされる．この新しい理論による新しい予言が検証され，従来の理論より広い普遍性を獲得した時に，新しい理論体系が確立する．

素粒子の標準理論は，1960年代前半から1970年代初頭にかけて多くの理論研究者によって提唱されたアイデアが多くの素粒子実験によって検証され，1979年頃に確立した理論体系であり，2013年後半の現在まで，その予言と矛盾する確実な実験事実は存在しない．この理論の適用範囲は実に広大で，エネルギーのスケールで数百 GeV（ギガ電子ボルト）以下の全ての実験事実を説明し，宇宙の進化と星々の誕生から終末までを記述する．それにも関わらず，私を含めて多くの理論研究者は，この理論体系の終焉が近づいており，近い将来の実験が契機となってより普遍的な新しい理論の模索が始まるだろうと思っている．

私はこの稿で，素粒子物理学標準理論の提案から確立まで，そして標準理論を越える新しい物理を探索する試みの現代史を，理論と実験との関わりに注目しながら述べてみようと思う．但し私は現役の研究者で，科学史家のような客観性を保って考えることができない．そこで，全く逆に，私個人の経験を通して学んだこと，考えたことを書いてみようと思う．素粒子の標準理論は私が大学院に入学した1974年頃に注目され始め，1976年には「標準理論」という言葉が使われ始め，大学院を修了する1979年にはその呼称が定着していた．標準理論の勃興に学生として立ち会ったわけなので，その当時の私が学んだこと考えたことを，その当時の自分の言葉で書いてみようと思う．その後多くの実験的検証を経て標準理論が確立していく過程が，私が研究者として成長していく過程でもあった．自分の研究を振り返ることが，素粒子標準理論が確立するに至る理論と実験との確執，そしてこの万能理論の黄昏が迫っているという私の予感の起源とを解説することになるのではないか，と思う．

1. 大学院生時代（1974–1979）

私が大学院に入学した年の11月に米国スタンフォード研究所の電子・陽電子衝突実験と，同じく米国ブルックヘブン研究所の陽子・原子核衝突実験が，新粒子 J/ψ を発見した．陽子の3倍もの質量（3 GeV）なのに崩壊幅が異様に小さい（0.0001 GeV）この新粒子はそれまでの理論と全く相入れないものと思われ，全世界の素粒子研究者がパニックに陥った，という印象を受けた．私の指導教官は今後自分は講義をしないので，スタンフォード研究所から毎週送られてくる実験と理論の論文を全部読むように，と命じた．私の素粒子論研究はこうして，わけも分からない理論の論文と沢山の実験論文をただひたすら読むことから始まった．

ところが丁度この時期，素粒子物理学の大発見が相次いだのである．表1に，素粒子の標準理論に関連する歴史的な事件を，左側に実験，右側に理論と分けて年表にしてみた．標準理論の理論的骨格は1973年までに全て提案されており，1974年からの5年間の数々の実験によってその正しさが検証された．私は期せずしてこれらの実験原著論文を読み，多くの理論模型が淘汰されていく過程を観察することになった．そして最後まで生き残ったのが，現在素粒子の標準理論と呼ばれているワインバーグ・サラム理論と量子色力学（QCD）である．研究者としての未熟さのため，この素粒子物理革命に参加することができなかった，という悔しさがその後の私の研究の原動力となったと思う．理論と実験の確執にまつわる当時のエピソードを二つ紹介したい．

1976年から77年にかけて，米国シカゴ郊外のフェルミ加速器研究所のニュートリノ実験で，後にW，Zボソンの発見（1982）でノーベル賞を受賞する Rubbia のチームが弱い相互作用の右巻カレントを発見したと

表 1 年表.

	実験	理論
1954		非可換ゲージ理論
1956		パリティー非保存予言
1957	パリティー非保存発見	
1961		$SU(2) \times U(1)$ 理論 自発的対称性の破れ
1962		ニュートリノ混合予言
1964	CP 非保存発見	ヒッグス機構
1965		SU(3) カラー理論(QCD)
1967		ワインバーグ・サラム理論
1971	陽子構造関数発見	チャーム(第 4 クォーク)予言 非可換ゲージ理論の繰込
1973	中性カレント発見	QCD の漸近自由性 6 クォーク予言
1974	J/ψ 発見	大統一理論
1975	タウ(τ) 発見 ジェット(クォーク)	
1976	チャーム発見, Υ 発見	「標準理論」提唱
1979	中性カレントの P 非保存	「標準理論」確立
1981		超対称性とテクニカラー
1982	W, Z 発見	
1983	グルーオン(ジェット)	
1984		超対称性の破れと ゲージ対称性の破れ
1986	B メソン振動	10 次元超対称弦理論
1990	3 ニュートリノ確定	
1991	3 ゲージ結合の精密測定	
1993	W, Z の精密測定	
1994	トップクォーク発見	
1996		11 次元 M 理論, ブレーン
1998	ニュートリノ振動発見	
2005	ミューオン磁気能率測定	
2008	LHC 稼働	
2012	ヒッグス粒子発見	

発表し，それを説明する数多くの理論模型が提唱され議論されていた．その頃東京でこの実験チームの方を招待した国際会議が開かれ，私も学生として聴講した．この会議の最後，終幕直前の 5 分か 10 分に，欧州原子核研究所 CERN からの最新の実験データが紹介された．そのデータは米国チームのものより遥に誤差の少ないもので，明確に右巻カレントを否定し，標準理論の左巻カレントを支持するものだった．これは私にとって衝撃的な事件だった．この会議に出席する僅か数カ月前に，ワインバーグとグラショウの共著論文を読み，彼らが右巻カレントの理論模型を痛烈に批判していることを知っていたからである．この事件は私に，理論の持つ整合性の重要性，時には実験データを疑わなければならないことを教えてくれた．このエピソードは私にとってはとても重要なものだが，Rubbia の実験とその解釈は誤りであることが確定したので，年表には記載していない．

表 1 に載せたより重要なニュートリノ実験は 1973 年の中性カレントの発見である．$SU(2) \times U(1)$ 群に基づく標準理論は左巻の荷電カレント（W 交換）を説明するだけでなく，Z 交換による中性カレントの存在を予言していた．ニュートリノが原子核に衝突してニュートリノとして散乱されるこの過程の検出は困難を極めたが，米国のフェルミ研究所との競争を制したのが CERN の泡箱実験であった．中性カレントの発見では遅れをとり，右巻カレント問題では勇み足となった米国のニュートリノ実験を指導した Rubbia は，これら二重の失敗の責任をとらされ，米国内で素粒子実験をすることができなくなった．

さて，大学院生時代のもう一つのエピソードは多分 1978 年，京都大学に 1 カ月滞在した時のことである．湯川・朝永という大先輩をもつ日本の素粒子論グループは，湯川のノーベル賞受賞を記念して建てられた基礎物理学研究所を中心に様々な若手研究者支援プログラムを設けていた．その内の一つが，大学院生時代に一回だけ，1 カ月研究所に机をもらって研究をし，北白川の宿舎の滞在費も補助してくれる，というものだった．どんな研究計画を提出したのかは忘れてしまったが，運良く採用され，京都で 1 カ月，充実した研究生活を送ることができた．

当時の宿舎は一部屋に 2 名，真ん中をカーテンで仕切って其々にベッドと勉強机があり，皆の共用空間として簡単な自炊ができるキッチン付きの食堂があった．どういうわけか覚えていないが，ある日，益川先生がこの食堂に現れて，いろいろと話してくださった．私以外にも学生が同席していたかも知れないが，覚えていない．でもその時，先生が話されたことは今でも明瞭に覚えている．「1967 年にワインバーグの論文を読んだ時，それが重要だとは思わなかった．ショックを受けたのは 1971 年にグラショウ達のチャームを予言する論文を読んだ時だった．名古屋の坂田門下として 4 クォーク模型の可能性をずっと考えてきたにも関わらず，ワインバーグ・サラム模型の重大欠陥だと思われていたフレーバー（ダウンとストレンジ）を変える中性カレントが小さすぎる事実が，第 4 クォークが存在する証拠だということに自分は気がつかなかった．せっかく物理学者になったのだから，一生に一度はこんな論文を書きたいと思った．」その思いが 1973 年の小林・益川論文として結実したのだということは，学生の自分にも分かった．

弱い相互作用の標準理論は通常，原著論文の著者名をとってワインバーグ・サラム理論と呼ばれる．ところが原著論文を読むと，この理論はレプトンの弱い相互作用（と電磁相互作用）を説明する模型として提案

されている．その理由は，この理論をクォークに適用すると，ダウンクォークをストレンジクォークに変換する中性カレント（Z ボソン結合）が現れ，観測された 2 種類の中性 K メソンの質量が殆ど同じだという実験事実に矛盾してしまうからだった．グラショウ達は，標準理論をクォークに適用しても，もし，第 4 クォーク（チャーム）が存在するならば，フレーバーを変える中性カレントは相殺して実験と無矛盾となることを 1971 年に示した．このチャームクォークが 1974 年には隠れた形で（チャームクォークと反チャームクォークの束縛状態 J/ψ として），1976 年にはチャームメソンとして発見されるのである．

小林と益川はこの 2 種類の中性 K メソンの性質に現れる不思議な現象，CP 非保存（1964 年）をワインバーグ・サラム理論の枠内で説明することを試みた．益川は初め，チャームを含む 4 クォーク模型で説明できるに違いないと予想したが，小林がそれは不可能であることを証明してしまった．クォークの種類（フレーバー）が 4 個でなく，6 個あれば CP 非保存が説明できる，という小林・益川論文は 1973 年に発表された．私が大学院に入った頃の話題の中心はもっぱらチャームを含む 4 クォーク模型の妥当性だった．当時ある科学雑誌の座談会の記事を読んだことを今でも記憶している．クォークが 4 種あるのではないか，という話題で盛り上がっているときに小林が，6 種あるかもしれないと発言し，（爆笑）と結ばれてあった．長い年月クォークは 3 種（アップ，ダウン，ストレンジ）と考えられてきたのが，J/ψ の発見によって 4 種かも知れないと議論され始めた時に，6 種クォークの提案は冗談程度にしか受け取られていなかったようだ．

さて，大学院生時代の自分の研究について一言．スタンフォード大学から毎週送られて来る論文の中で，理論論文と実験論文の 1 編ずつに特に注目した．米国の理論家 Appelquist と Politzer による論文では，J/ψ 粒子はグラショウ達が予言した重いチャームクォークと反チャームクォークの束縛状態だと仮定する．強い相互作用のゲージ理論，QCD は，量子電気力学の電子をクォーク，光子をグルーオンに置き換えた理論なので，J/ψ は電子と陽電子の束縛状態ポジトロニウムのようなものだ．スピンが 1 のポジトロニウムが 3 光子に崩壊するように，J/ψ は 3 グルーオンに崩壊する．この摂動論的な描像が成立するのは QCD の漸近自由性（1973 年）のためである．3 色構成子（クォーク）が重くなると，白色複合状態（ハドロン）であるクォーク・反クォーク間の相対距離が小さくなり，特に 3 グルーオンに崩壊する瞬間はとても短距離にあるので有効結合が小さくなる．J/ψ の崩壊幅が異様に小さいのは，それがこの小さくなった有効結合の 3 乗に比例するからである．世界中の素粒子研究者を驚愕させた J/ψ 粒子が，実は弱い相互作用のゲージ理論であるワインバーグ・サラム理論をクォークに適用することで 1971 年に予言されていたチャームクォークからできていて，その崩壊幅が小さいことが QCD の帰結なのだ，という論旨は明解で，論文を何度も読み返した．私はこの時に素粒子の標準理論のパワーを理解した．

一方，私に衝撃を与えた実験論文は，やはりスタンフォード研究所におけるハドロンジェットの発見（1975 年）である．高エネルギーの電子・陽電子ビーム衝突実験では，主にパイメソンからなる多数のハドロンが生成されるが，その運動量が一直線上に揃う傾向があり，ジェットのように見える．しかもそのジェットの角度分布が，質量ゼロのディラック粒子（内部構造を持たないスピン 1/2 粒子）が対生成された場合に一致する．QCD の漸近自由性によって，高エネルギー（短距離）のハドロン生成は摂動論によるクォーク・反クォーク対生成で近似される．この対は反対方向の高運動量を持つので，時間と共に離れていき，クォーク間距離が長距離となる．今度は QCD の有効結合が大きくなり「色の閉じ込め」の機構が働いて白色ハドロン（パイメソン等）が生成される．この力は全ての向きの運動量が小さい（長距離）場合にだけ強いので，生成されたハドロンの運動量は，クォーク・反クォークの大きな運動量の向きから大きくずれることができない．結果として，短距離で生成されたクォーク・反クォークの運動量の向きに沿って沢山のハドロンが生成され，それがジェットのように見える．それまで，多くのハドロンのカタログ作りに役立ち，電子の深非弾性散乱による陽子構造関数（1971 年）のスケーリング則と和則を導く，QCD の基本粒子クォークの実体はどこか抽象的だったのだが，このジェットの発見で，俄然，実体を持つ素粒子と思えるようになった．

1976 年，米国フェルミ研究所で新粒子 Υ（ウプシロン）が発見され，それが 5 番目のクォーク，ボトムクォークと反ボトムクォークの束縛状態ではないかと想定された時，私は直ぐに上の 2 論文を読み返した．J/ψ が 3 グルーオンに崩壊するなら，Υ も 3 グルーオンに崩壊する．Υ の静止質量は陽子の約 9 倍（9 GeV）なので，生成されるグルーオンのエネルギーは平均で

3 GeV．クォークのエネルギーが 3 GeV 程度の実験でハドロンジェットが観測されたのだから，Υ の崩壊ではグルーオンがジェットとして観測される可能性がある．QCD の色の閉じ込め機構は普遍的なはずだから，グルーオンジェットの構造は観測されたクォークジェットと似ているだろう．ボトムクォークはチャームクォークより更に 3 倍重いので，摂動論の近似は更に良いだろう．こうした推論を重ねて，Υ 崩壊でのハドロンの分布を計算し，1977 年に論文として発表した．その翌年，東京で大きな国際会議が開催され，私はカーテンを開け閉めするアルバイトをすることで参加させてもらっていた．Υ 崩壊はドイツ DEZY 研究所の新しい電子・陽電子ビーム衝突実験で観測され，DEZY の研究者が結果を報告した．そのスライドの中，観測された実験データと共に理論の予想値があり，その下に私の名前が書いてあった．自分の論文を外国の研究者が読んでくれていた，しかも，観測結果は自分の予言の通りだった．大きな会場の立ち見席での，その時の密かな感動が，その後の私の研究を支えたと思う．

この節を終える前にもう一言．研究者は新しい知見を論文として投稿し，他の研究者の査読を経て専門誌に発表する．日本では湯川を中心に創刊された専門誌「理論物理学の進歩」（*Progress of Theoretical Physics*）があり，学生もそこへの投稿を勧められていた．この雑誌は理論物理学の数分野，素粒子理論，原子核理論，宇宙線・宇宙物理理論，物性理論，の研究を対象としていて，当時，実験論文は殆どなかった．私は学生ながら，理論と実験の闘いによる物理学を志し，自分の論文は実験家が読んでくれる雑誌に投稿しようと決め，外国の雑誌に発表した．思えば日本の専門誌の創刊時は，戦後間もなく，実験設備も実験研究費もない（仁科達が心血を注いだサイクロトロンは進駐軍によって破壊された）時代であり，一方，理論物理学では世界一流の研究が次々と発表されていたので，これは自然なあり方だったのだと思う．私が大学院生の頃やっと，少しずつ，日本の素粒子実験が始まっていた．チャームの発見は多分，名古屋大学チームの宇宙線観測（1971 年）が最初なのだが，私がそれを知ったのは，1974 年の J/ψ 発見の後だった．私の年表（表 1）はその意味で正確ではないのだけれど，全体の流れを掴み易いように最小限の事項に限った結果である．許していただきたい．ニュートリノ実験の数々の成果，最近のヒッグス粒子発見に対する貢献等，日本の素粒子実験は今では世界をリードしている．その流れを受けて，我が国の専門誌も昨年，「理論・実験物理学の進歩」として再出発した．

2. 博士研究員時代（1979–1989）

私が学位を頂いた当時は，今でもだが，就職難で，私は無給（どころか研究生として学費を支払う）時代を経て，1981 年から 3 年間米国ウィスコンシン大学，その後の 2 年間をドイツ DEZY 研究所の博士研究員として研究に打ち込んだ．1986 年に KEK（現高エネルギー加速器研究機構）に就職したが，1989 年には英国ダラム大学研究員として渡欧した．その頃のエピソードを 3 つ紹介する．

ウィスコンシン大学での 2 年目，1982 年に CERN の陽子・反陽子ビーム衝突実験で，Rubbia のチームが弱い相互作用のゲージボソン，W と Z を発見した．この内 Z の発見は予想されていたが，W の発見は必ずしも想定内とは言えない，ということを強調したい．W はその荷電レプトンとニュートリノ（電子と電子ニュートリノ，ミューオンとミューニュートリノ）への崩壊によって発見されたが，Rubbia のチームは，検出器にかからないニュートリノ運動量のビーム軸から横向きの成分を，生成される全ての粒子の横向き運動量を測定し尽すことで，運動量保存則を使って測定する，という驚天動地のアイデアを成功させた．彼らはそれまでの素粒子実験検出器とは全く違う，ビーム軸周りの極小方位角部分を除く全方向を完全に包囲する，穴のない検出器を作ったのだ．これは Rubbia の卓越した先見性と強い指導力によって実現したもので，彼らの検出器（UA1）がその後のビーム衝突（コライダー）実験検出器の雛形となる．当時米国フェルミ研究所で，後にトップクォークを発見（1994 年）することになる検出器を建設中だったが，その検出器は従来型の穴だらけのもので，Rubbia の成功を知ってから急遽巨額の資金を手当てして大改造したのである．

1984 年からの 2 年間，DEZY 研究所では多くの日本人実験研究者と知り合った．中でも今，次期将来計画 ILC（国際リニアコライダー）計画の船頭を務めている駒宮幸男氏との共同研究では多くのことを学んだ．当時，QCD の CP 非保存問題の解決策として様々なアクシオン模型が考案されていたが，それを駒宮氏が参加する電子・陽電子消滅実験で検出できないか，と考えた．私のアイデアは，通常のデータ処理の後では適用できないとのことで，彼は元データが記録されているテープを使って解析した．面白かったのは，若手実験家同士も競

争なので，この解析は夜間だけに行い，昼間は通常業務をすることで，秘密を守った，と言っていたことである．残念ながらアクシオンを発見することはできなかったが，彼の解析は実験グループで認められ，私も彼らの実験論文の著者として迎えられた．私の唯一の実験論文であるが，もちろん，実験装置にさわったことはない．駒宮氏が彼らの検出器のお守り（シフト）をした一晩だけつきあって，世間話をした時が一番検出器に近づいた時だと思う．実験家は医者のようなもので，検出器に異常があるとポケベルが鳴り，すぐに急行して手当てをしなければならない．理論家で良かった，と思った．

1989 年，英国ダラム大学滞在時に，フランス北部ノワール川沿いのブロア城で，1974 年の CP 非保存発見 25 周年を祝う国際会議が開かれた．この発見でノーベル賞を受賞した Cronin も講演したが，この会議で忘れられないのは，同じ研究をしていて一敗地にまみれた Steinberger の講演だった．彼は米国フェルミ研究所の実験で，CERN の Cronin 達の実験と同様の結果を得ていた．彼は困惑し，理論家に相談した．彼が相談した全ての理論家が，彼の結果は誤りだと断定し，最も親切な理論家は実験の誤りがどこにあるのかを，真剣に一緒に探してくれた．同じ時，Cronin 達は彼らの実験結果が疑問の余地なく正しいことを証明するために心血を注ぎ，その結果を発表した．Cronin 達が示した実験家としての誇りに心からの尊敬の念を感じた，という内容だった．

CP 非保存が，当時の全ての理論家にとって如何に受け入れがたいことであったかを説明するのは難しい．年表の 1956 年，Lee と Yang がパリティー（P）非保存を予言した時に遡らなければならない．彼らは中性 K メソン系のパズル，パイメソン 2 個に崩壊し，従ってパリティーが正のメソン（寿命が短いので短寿命 K と呼ぶ）と，3 個に崩壊するパリティーが負のメソン（寿命が長いので長寿命 K）の質量が全く同じと思われる（極僅かな質量差と寿命の違いが測定されたのは数年後だった）問題の解として，パリティー非保存の可能性（同じ粒子がパリティー正と負の崩壊をする）を提起し，その検証法を提案した．今考えれば，短寿命と長寿命の 2 種の中性 K メソンがあるのだから，彼らのこの前提は完全な誤りである．にも関わらず，彼らのパリティー非保存の予言は次の年に実験で証明される．全くの勘違いから正しい物理が予言されたのである．彼らの論文の真骨頂は，もし弱い相互作用がパリティーを保存しないならば，スピン偏極させた原子核のベータ崩壊で放出された電子の運動量分布が偏極の向きに依存する非対称性を持つはずだと，その検出実験を提案したことにある．理論家による実験提案の最も美しい例として，今でも模範としたい論文である．

ところで，パリティー非保存が確定してすぐに，2 種の中性 K メソンが同定され，それらはパリティー（空間反転）の固有状態ではなく，同時に粒子・反粒子反転を伴った CP 変換の固有状態だと考えられるようになった．そして，古典物理学，電磁気学，強い相互作用におけるパリティー対称性は，素粒子物理学ではその真の姿，CP 対称性に格上げされる．当時の理論家は，この CP 対称性こそが，物理学の真の対称性だと，神聖視するようになったのである．Cronin 達はこの CP 変換の下で負の固有値を持つ長寿命 K が，極僅か，正の固有値を持つ 2 パイに崩壊することを突き止めたのである．これが紛れもない CP 非保存の証拠であり，後に小林・益川理論を導き，その理論の帰結が KEK 等の B ファクトリー実験で検証される．

私が海外研究員時代に学んだ一番重要なことは，実験と理論は対等でなければならない，その関係はより闘争的であるべきで，どちらかがどちらかに従属してはならない，ということである．

3. 素粒子標準理論を越える新理論の予感

さて，表 1 の年表に戻ろう．素粒子の標準理論は原子核を作る強い相互作用，原子核のベータ崩壊をもたらす弱い相互作用，そして原子を作る電磁気相互作用の全てを，ゲージ変換（空間各点に依存した波動関数の複素位相変換）対称性を持つ場の量子論から導く．波動関数がベクトル，この複素位相が行列になると，ゲージ変換は非可換となり，その理論は 1954 年に Yang と Mills によって提案された．強い相互作用はカラーの SU(3) 群に基づき，近距離での漸近自由性と長距離での色の閉じ込めを導く．弱い相互作用は SU(2) と U(1) の積群に基づき，ヒッグス粒子が関与する自発的対称性の破れの機構によって，ゲージボソン（W と Z）が重くなり，生き残る U(1) ゲージ対称性から質量ゼロのゲージボソン（光子）が導かれる．

こうして重力を除く全ての相互作用が量子力学の要請を厳密に満たす場の量子論によって記述され，従って，全ての素粒子の相互作用を計算し，予言することが可能な理論体系が標準理論である．この理論の予言は現在まで，ほぼ全ての素粒子実験で検証され，確実な反証はない．しばしば新しい物理として紹介される

表 2　素粒子質量と物理スケール（単位は GeV）.

	素粒子	物理
10^{17}		重力の量子論
10^{16}		3 ゲージ結合の大統一
10^{15}		
10^{14}		
10^{13}		
10^{12}		
10^{11}		
10^{10}		
10^{9}		
10^{8}		
10^{7}		
10^{6}		
10^{5}		
10^{4}		
10^{3}		超対称性の破れ仮説
10^{2}	トップ，W，Z，ヒッグス	ゲージ対称性の自発的破れ
10^{1}		
10^{0}	チャーム，ボトム，タウ	
10^{-1}	ストレンジ，ミュー	原子核のスケール
10^{-2}		
10^{-3}	アップ，ダウン，電子	
10^{-4}		
10^{-5}		
10^{-6}		原子のスケール
10^{-7}		
10^{-8}		
10^{-9}		
10^{-10}	ニュートリノ(ν_1, ν_2, ν_3)	

ニュートリノ質量は，もし，それがシーソー機構（1979 年）で予言されるようなマヨラナ質量であれば，標準理論を越える物理だが，その確証（無ニュートリノ 2 重ベータ崩壊）はまだない．

それにも関わらず，素粒子論研究者は標準理論を究極の理論だとは考えない．表 2 に，全ての素粒子の質量と，関連する物理のスケールを対数軸上に並べて見た．単位はギガ電子ボルト（GeV），ほぼ陽子あるいは水素原子の静止質量である．左側に並べた素粒子の質量表が，我々にとっての周期律表だ．

この表から規則性を見出すのは難しい．3 種のニュートリノが特に軽いかも知れない．柳田らは 1979 年にそれを説明する試みとしてシーソー機構を提案したが，この魅力的な仮説のヒントはまだ見つからない．一方，クォークの分数電荷とレプトンの整数電荷の謎と，左巻成分が SU(2) 群の 2 重項なのに右巻成分が 1 重項だという実験事実が，共に「大統一ゲージ理論」の仮説から導かれることが 1973 年に提案され，1974 年にはもしこの大統一理論が正しく，且つその大統一ゲージ対称性がとても高いエネルギースケール（表 2 では現在最もポピュラーな超対称性標準理論が予言する統一スケールの 10^{16} GeV とした）で実現されるならば，SU(3) 群のゲージ結合が一番強く，U(1) 群の結合が一番小さいという実験事実が自然に導かれる，所謂「大砂漠仮説」が提唱された．クォークとレプトンが異なる相互作用をするのは，我々の実験がまだまだ低エネルギーだからで，実は全て同じ粒子の異なる成分なのだ，というこの理論はとても魅力的で，ひとたびその魅力に搦め捕られると，逃れるのは難しい．

もしこのアイデアが正しいとするならば，表 2 のゲージ対称性の自発的破れのスケール（10^2 GeV）から大統一理論のスケール（10^{16} GeV）まで，実に 14 桁もの広大なスケールに渡って新しい物理が現れない「大砂漠」がある（中間にニュートリノ質量のシーソー機構や宇宙のバリオン生成に関与する新しい物理の「オアシス」があるかも知れない）．物理学の歴史を紐解くと，スケールが数桁変化すると，全く新しい物理法則が見つかるという例に事欠かない．素粒子の標準理論を記述する場の量子論は，過去の物理理論に較べて格段に強いスケール変換に対する安定性を持つので，この大砂漠仮説は正しいかもしれない．ただし，この安定性の唯一の欠点が，スカラー粒子であるヒッグスボソンの質量である．場の量子論の範囲内で，ヒッグスボソンの質量を安定化するアイデアが，1981 年頃に提案された．ヒッグスボソンを複合粒子として導くテクニカラー理論と，スカラーのヒッグスボソンとフェルミオンのヒッグスフェルミオンの対を考える超対称性理論である．後者の仮説では，この素粒子スピンを変換する対称性（超対称性）が大砂漠の安定性のために必要で，ゲージ対称性を破るヒッグスボソンの質量はこの超対称性の破れから導かれるはずなので，表 2 ではテラスケール（10^3 GeV $= 1$ TeV）に超対称性の破れの物理を置いた．これはもちろん理論家としての私の偏見である．

1984 年頃，トップクォークが充分重ければ，超対称性の破れがゲージ対称性の破れを自然に導くというアイデアが井上らによって提案されたが，当時 KEK で建設中の TRISTAN 加速器でトップクォークを発見できると期待していた私は懐疑的だった．しかし，1994 年に井上らの条件を満たすほど重いトップクォークが発見されたこと，1990 年代初頭の W，Z ボソンの精密実験によって測定された 3 ゲージ結合定数の大きさが，テラスケールに超対称性粒子が存在する仮説を支持したこと等を受けて，私の研究は実験データの中にテラスケール物理のヒントを捜す，というテーマに集中した．多くの精密実験データを検証したが，その中から一つ，ミューオン磁気能率の測定を取り上げよう．

2005年にミューオン磁気能率の精密測定結果が発表され，標準理論の予言と有意にずれていた．私は直ちに標準理論の計算の厳密な再評価を開始し，当時ダラム大学の博士研究員だった野村大輔氏らと共に結果を発表した．その後の実験データの改善もあり，現在では理論と実験の誤差は3標準偏差以上である．もし，我々の計算と実験データの双方が正しければ，これはテラスケールの物理の確かなシグナルだ．この結果はミューオンと同じフレーバー量子数を持つ新粒子が存在することを示唆し，超対称性理論は恰好の候補である．表1に掲げた実験事実の内，これが唯一，標準理論の予言と矛盾し，従って確定していない結果である．もし，理論の予言と実験のどちらかが誤りであればこの項目はこの表から消滅する．でももし双方とも正しかったら，この項目は将来の年表でも生き残り，テラスケール物理の最初の確かなヒントであった，と記されるだろう．

4. 高エネルギー物理学の将来

現在，我々はLHCにおけるヒッグスボソンの発見に沸いている．素粒子物理学の歴史で初めて，スカラーボソン（ローレンツ変換の下で変換しない，つまり，単独で存在する）素粒子が発見された．クォークとレプトンはスピン1/2のフェルミ粒子だから，回転する自由度を持つ．光子，W，Z，そしてグルーオンはスピン1のベクトル粒子だからやはり回転の自由度を持つ．この回転の自由度に関連した対称性（カイラル対称性とゲージ対称性）があることが，これらの素粒子が我々に手の届く質量を持っている理由だと考えられている（表2参照）．スカラーボソンはこの自由度を持たないので，その質量がW，Zと同じ程度であることには，必ず，何らかの理由があるに違いない．その理由，つまりヒッグスボソンの起源を探ることが現在喫緊の課題であり，その最も確かな手がかりは，ヒッグスボソンの精密実験によって得られるだろう．

このヒッグスボソンの精密実験こそが再来年に再開されるLHC実験の最重要課題であるが，この目的を遥に高い精度で実現する将来計画がある．国際電子・陽電子リニアコライダーILCである．ILCはヒッグスボソンとZだけを対生成することができるので，莫大なバックグランドの中からシグナルを捜さなければならないLHCとは比較にならないほど綺麗な環境で精密測定をすることができる．低バックグランド実験の利点は自然科学の全ての分野の研究者にも納得してもらえるだろう．今，日本の高エネルギー物理学研究者は，この夢の国際リニアコライダーを国内に建設する提案をしており，この提案は欧米とアジアの多くの地域の研究者の賛同を得ている．

そこで最後に一つ，日本の素粒子実験研究者がどのようにして自らの将来計画を決めているかを紹介してこの稿を閉じたい．いつ始まったのかは知らないが，彼らには一つの伝統がある．10年20年先の将来計画を真剣に議論できるのは，学会の長老ではなく，50才以下の10年後も第一線で活躍している若手・中堅研究者だ．従って，将来計画は若手・中堅研究者が立てなければならない．この考えてみれば当然の議論に従って，高エネルギー物理学実験の将来計画を提案する「将来計画小委員会」の委員は全員50歳以下の研究者である．私は90年代にこの委員会の理論委員を務めた．多くの実験研究者に混じって理論研究者が3名，加速器研究者が2名だったと思う．2年以上の期間にわたって多くの計画を細部まで検討し，LHCとILCをエネルギーフロンティア実験の両輪としてその実現に務めなければならない，という提言を提出した．現在やっと学術会議，政府レベルで議論されるようになったILC計画提案は，こうした長い年月をかけた辛抱強い検討と努力の産物であることを多くの皆さんに伝えたいと思う．私は中国や韓国を訪ねる度に，日本の実験研究者達のこの伝統の話をし，これこそが日本の素粒子実験が世界をリードするレベルに逸早く達した原動力だと思うことを伝えた．未だに長老支配が横行するこれらの国の研究者達の耳には新鮮な驚きとして受け取られているようである．

私は，新しい理論，仮説を発表し，それを検証する実験を提案することが理論家の役割だと述べた．もう一つ，ずっと地味だが，新しい実験が提案されたならば，その実験の実現を支援し，実験が開始されたら，それを支えることも理論家の役割だと思う．私は80年代末にKEKに着任して，我が国初のエネルギーフロンティア加速器TRISTANの実験を支援した．その当時既に，遥か将来のリニアコライダーの夢を語る実験家達に会い，彼らが必要とする超高エネルギー現象を調べるために，学生達と共に散乱振幅計算コードを開発した．このコードは欧米の研究者に引き継がれ，今ではLHC実験解析プログラムの殆どの中に，原型のままで，または変更された形で使われている．ILCの物理解析においても大いに活躍してくれると思う．

（はぎわら・かおる，高エネルギー加速器研究機構）

ヒッグス粒子の発見と素粒子物理学実験の展開

駒宮　幸男

1. はじめに

2012 年 7 月にヒッグス粒子と呼ばれる素粒子が，CERN の LHC での ATLAS 実験と CMS 実験で発見された．私はこれを「7 月革命」と呼んでいる．ヒッグス粒子は，これまで発見された物質を形成する素粒子（クォークとレプトン）や相互作用を担う素粒子（ゲージボゾン）と全く異なる種類の素粒子であり，素粒子の質量の起源となる．もしヒッグス粒子が存在しなければ電子は質量を持つことができず，電子と原子核が結合して原子を形成することができないため，我々の存在もなかっただろう．このような歴史的な大発見は 1974 年に米国のブルックヘブン研究所とスタンフォード線形加速器センター（SLAC）で J/ψ 粒子が殆ど同時に発見されて以来である．因みに 1974 年の発見は 11 月に発表されたので「11 月革命」と呼ばれている．J/ψ 粒子はチャームクォークとその反粒子の結合状態であった．この発見が大きな契機となって標準理論と現在呼ばれている素粒子の理論体系の基本的な枠組みができてきた．その後の標準理論の確立は，前世紀の終わりに実験と理論の相乗効果によってなされた．本解説では，標準理論 = アンシャンレジーム を超えて素粒子物理学の新たなパラダイムへ進む方向を予想し，現行の LHC での実験と，次の加速器である国際リニアコライダー（International Linear Collider, ILC）での新粒子・新現象の発見について述べる．

2. 極めて私的な実験と理論の相乗効果

J/ψ 粒子が発見されて間もなく，1976 年に私は大学院に進学したが，ある日のあまり早くない朝，渋谷行きの東横線の車中でその日の輪講で発表する論文を読んでいた．見知らぬ青年が前に立ち，私の読んでいた論文を急に奪って，「これって η_c のこと書いてあるんだよね.」，と言って関連する素粒子物理の話を滔々と始めた．η_c は J/ψ 粒子の仲間の粒子である．私は，ただあっけにとられるばかりであったが，強烈な印象を植え付けられた．この日のその後のことは覚えていない．彼こそが本特集の素粒子理論の執筆者，萩原薫氏である．その後私はハイデルベルク大学に就職し，ハンブルクのドイツ電子シンクロトロン研究所（DESY）での実験に参加していたが，1984 年にハンブルクの繁華街を車で走っていると，見たことのある日本人が奥さんらしい人と歩いていた．萩原さんだった．彼は DESY の理論部に就職したとのことであった．彼はウィスコンシン大学で，当時まだはしりであった超対称性の研究をしてきた．私も超対称性粒子の探索をはじめていたので，萩原さんにはいろいろと教わった．当時，W ボゾンと Z ボゾンが CERN の陽子・反陽子コライダー（粒子衝突型加速器）で発見された．そのうえトップクォークや超対称性粒子の兆候も見えたという噂も立った．理論家もこれらのガセネタに様々な解釈を与え，超対称性はもとより，標準理論を超えたヒッグス粒子の兆候であるなど様々な論文が出た．DESY の電子・陽電子衝突のエネルギーフロンティア・コライダー PETRA は，エネルギーこそ CERN の陽子・反陽子コライダーよりも低いが，電子・陽電子衝突のクリーンでバックグラウンドの少ない実験環境をフルに生かして，これら解釈を否定しまくった．この過程で萩原さんや彼の友人の D. Zeppenfeld 氏（現・カールスルーエ工科大学教授）と一緒に現象論の論文もいくつか書いた．と言っても私は計算機を使ってシミュレーションをしただけだが．DESY にはその後，柳田勉氏（現・東京大学 IPMU 教授）や日笠健一氏（現・

東北大学教授）も来られ，彼らにも大変に刺激されたし，いろいろとアイデアの種も貰った．萩原さん，柳田さんとはその後も，日本の素粒子実験計画の策定のための将来計画検討小委員会を一緒にやっていただいたり，お世話になっている．これらは極めて私的な理論家と実験家の相乗効果，というよりは一方的に私がお世話になった話である．

3. ヒッグス粒子とは何か？

標準理論では，弱い相互作用のゲージボゾン，クォーク，荷電レプトンの質量の起源は，ヒッグス粒子との相互作用である．ニュートリノの質量は，実験で非常に小さい質量を持っていることが分かっている．恐らくニュートリノの質量獲得機構は，他の素粒子のそれとは異なるだろう．

ニュートン力学の第2法則では，質量 M の物体に力 F を加えると，力を加えた方向に加速度 α で動き出し，$F = M\alpha$ が成り立つ．質量 M が大きければ，同じ力を加えたとき加速度は小さくなる．すなわち，質量は動き難さの指標である[*1)]．

一方，真空とは何もいない全くの空の空間である．宇宙の初期においては，ヒッグス場のポテンシャルの形は図1の左にあるように最小値が一カ所だけであった．このポテンシャルの最も低い点が「真空」である．真空では $\phi = 0$ であった．しかし，宇宙が膨張して冷えてくるとポテンシャルの形が図1の右にあるように相転移が起こり，ポテンシャルの最も低い点が2カ所できる．真空はこのどちらかとなる．例えば自然が $\phi > 0$ の窪みを真空に選ぶと，真空が ϕ_0 というヒッグス場の値を持つことになる[*2)]．すなわち，ϕ_0 という値のヒッグス場が真空に充満することになる．素粒子はこのヒッグス場と相互作用することで，動き難くなり質量を獲得する．光子のように質量がゼロの粒子はヒッグス場とは直接的には相互作用しない．ヒッグス場との相互作用が大きな粒子ほど質量が大きい．ゲージ粒子と，クォークやレプトンの質量獲得機構は若干異なるが，いずれにしてもヒッグス場との相互作用が

*1） 力が加わっていない物体は静止しているか等速直線運動をしている．動いている物体に力を加えるとその方向に加速度を得る．従って正確には質量はそれまでの動きを変えることを妨げること（慣性）の指標である．

*2） 実際にはヒッグス場は標準理論では4個ある．このうちの3つの場は $W^{\pm}$ ボゾンと Z ボゾンの質量生成に使われ，一種類だけが粒子として残る．

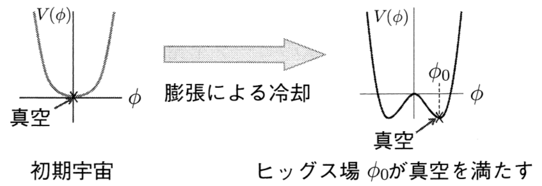


図1　ヒッグスポテンシャルの相転移．ここではヒッグス場 ϕ は1種類だけを仮定しているが，標準理論では4種類存在する．本質を失わずに易しく説明できるように簡略化した．

原因である．このように，ご都合主義的で人工的とも思える粒子がヒッグス粒子であり，従って，まさにこの発見は人類の叡智の勝利である．このヒッグス粒子がいなければ，素粒子が質量を獲得できない．また，$WW \to WW$ という弱い相互作用のゲージボゾン同士の散乱を，光子や Z ボゾンだけでなくヒッグス粒子も媒介することによって，負の干渉が起こり散乱断面積がユニタリティー（確率）を破ることを防いでいる．

4. ヒッグス粒子の発見

この様に重要な粒子を実験家が放っておくはずはない．ヒッグス粒子の提唱から50年，様々な実験でヒッグス粒子の探索が続けられた．最近の探索だけ見ても，1990年代には電子・陽電子衝突のLEP-IIにおいて探索され，次いで今世紀に入ってからは，陽子・反陽子衝突のTEVATRONでの探索が続けられた．LEP-IIでの直接探索からはヒッグス粒子の質量は114.4 GeV以上であり，LEP-Iの Z ボゾンの精密測定とTEVATRONでのトップクォークの質量測定の結果を結合させると間接的に135 GeV以下に存在することが予言された．すなわち，ヒッグス粒子はLHC稼働前に既に114.4 GeVと135 GeVの間の狭い質量範囲に追い込まれていた．しかし，これは標準理論を仮定した場合であり，LHCでの直接探索で勝負しないと真相は分からなかった．

ヒッグス粒子の崩壊モードで最も崩壊確率が大きいのは，ボトムクォークとその反粒子のペアに崩壊する場合であり崩壊確率は65%である．しかしLHCでこのモードを探索するのは，バックグラウンドが大きすぎて困難である．まず探索するべき有望なモードは，崩壊確率が0.2%と小さくても鋭い質量ピークが見える二つの光子（$\gamma\gamma$）に崩壊するモードである．このモードは，ヒッグス粒子の発見において重要なので，少し

詳しく述べる．二つの光子のシステムの不変質量を計算しヒッグス粒子の質量のピークを発見するためには，二つの光子のエネルギーを測定器の中心にある衝突点から離れた電磁カロリメータでそれぞれ精度よく測定するだけでなく，それらの運動量の方向を測定しなければならない．二つの光子のなす角度の精度が，それぞれの光子のエネルギー測定精度と同様に重要である．LHC 加速器はルミノシティーが高く，かつ陽子・陽子の非弾性散乱断面積が大きいので，ATLAS 実験や CMS 実験で二つのビーム（バンチ）が一度衝突すると数十個の反応が生じビーム方向数十 cm に分布し，それぞれの反応点からいくつもの粒子が放出される．これらのうち，どの反応点でヒッグス粒子が生成されたかが分からないと，光子の運動量の方向が分からない．そこで，反応点から放出された荷電粒子の横方向運動量の和が最も大きな激しい反応を起こした反応点を，ヒッグス粒子の生成点であると考える．ATLAS はカロリメータが 3 層に分かれており，ある程度方向が分かるので予め少数の反応点に絞れる．CMS は電磁カロリメータのエネルギー分解能は優れているが，1 層なので衝突点を絞り込めず光子の運動量方向が分からないので，一長一短である．図 2 の ATLAS 実験の 2 つの光子の不変質量分布において，ヒッグス粒子のシグナルは大きなバックグラウンドの分布の上に乗っている．この信号の山の幅を小さくすることができれば，すなわちヒッグス粒子の質量分解能を良くすることができれば，シグナルの下のバックグラウンドを減らせるのでヒッグス粒子の信号の信頼度を上げることができる．

次いで重要なモードは，ヒッグス粒子が Z ボゾン 2 個に崩壊し，かつ各 Z ボゾンが電子・陽電子ペアか $\mu^+\mu^-$ のペアに崩壊するモードである．この合成崩壊確率は 0.01%程度と小さいがバックグラウンドレベルが低い．ただし，二つの Z ボゾンの質量の和がヒッグス粒子の質量よりも大きいので，片方の Z ボゾンはその固有質量よりも小さな質量を一瞬持つので，この崩壊は通常 $H \to ZZ^* \to \ell^+\ell^-\ell'^+\ell'^-$（$\ell, \ell'$ は e または μ，Z^* は質量のずれた Z ボゾン）と書かれる．測定されるのは，終状態の 4 個のレプトンの運動量である．荷電粒子はソレノイド磁場の中で飛跡が曲げられ，多層のシリコン飛跡測定器でこの曲率を測定し，運動量が測られる．図 3 は CMS 実験の $H \to ZZ^*$ 崩壊の不変質量分布である．LHC の両実験は上記の 2 つのモードで明確なヒッグス粒子の信号を発見した．

その他にヒッグス粒子が W ボゾンのペアに崩壊するモードでも信号が見え，さらに $\tau^+\tau^-$ への崩壊も見えた．ヒッグス粒子の発見はもはや疑う余地がない．また，素粒子の固有の量子数であるスピン・パリティーの同定も進み，発見された新粒子は真空と同じ量子数（スピン ＝ 0，パリティ ＝ ＋）を持つことが分かり，ヒッグス粒子であることが確定した．ただし，標準理論のヒッグス粒子であるのか，標準理論を超えたものであるかを判断することは，おそらく LHC でのヒッ

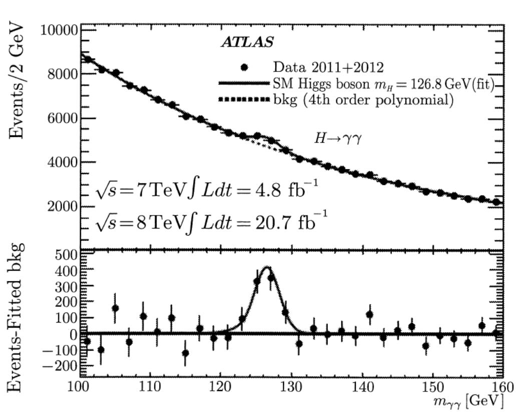


図 2 ATLAS 実験が得た 2 光子の不変質量分布．上の図はバックグラウンドにヒッグス粒子のシグナル（小山）が乗っている．下の図はバックグラウンドを引いたヒッグス粒子のシグナル（European Physics Society Meeting EPS-HEP2013 への ATLAS グループの投稿より）．

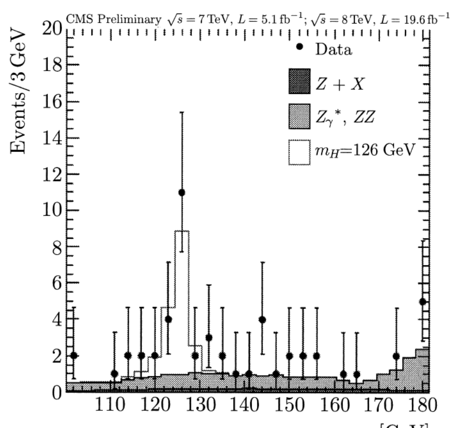


図 3 CMS グループが得た 4 レプトンの不変質量分布，125 GeV 近くの山が $H \to ZZ^* \to \ell^+\ell^-\ell'^+\ell'^-$（$\ell$, ℓ' は e または μ）のシグナル（European Physics Society Meeting EPS-HEP2013 への CMS グループの投稿より）．

グス粒子の測定だけでは不可能であろう．

我が国の研究者も ATLAS 実験に参加しており，測定器のコンセプトの提案・設計・建設からデータ解析に至るまでその中心で研究を続けている．また，多くの大学院生も実験に参加して活躍している．

ヒッグス粒子は，今までに発見された素粒子であるクォークでもレプトンでもなく，ゲージボゾンでもない全く新しいタイプの素粒子である．標準理論では真空に充満したヒッグス場がすべての質量の起源である．

また，ヒッグス粒子は標準理論を超えて先を見通す窓である．ヒッグス粒子は真空と同じ量子数を持つので，その発見は，宇宙初期に生じたとされる大膨張（インフレーション）や，現在の宇宙の加速膨張を説明する暗黒エネルギーの理解の第ゼロステップとなると，強弁できるだろう．発見されたヒッグス粒子の質量は約 125 GeV と比較的軽く，これは恐らくヒッグスボゾンが複合粒子でなく内部構造のない素粒子であることを意味する．また，標準理論を超える物理が高いエネルギー領域にある場合，この軽いヒッグス粒子の質量を安定化するには，何か標準理論を超える新物理が TeV 領域に存在することが必要であり，その最も有力な候補が超対称性理論である．標準理論は重力が内包されていないので，破綻をきたすのは時間の問題である．

5. 超対称性

素粒子にはクォークやレプトンのようなスピンが半整数（1/2）のフェルミ粒子と，ゲージボゾンやヒッグス粒子のようにスピンが整数（0,1）のボーズ粒子が存在する．超対称性理論はフェルミ粒子とボーズ粒子の交換に関する対称性である．標準理論の枠内では，フェルミ粒子とボーズ粒子の自由度が大きく異なるので，超対称性は存在しない．そこで，標準理論のすべての素粒子に超対称性パートナーが存在すると仮定する．例えば，スピン 1/2 のフェルミ粒子である電子にはスピン 0 のボーズ粒子である超対称性電子が，スピン 1 の光子にはスピン 1/2 の超対称性光子が，パートナーとして存在すると仮定する．素粒子理論ではなるべく少ない数の基本粒子を用いて理論を構築するのが原則であり，超対称性は原則を踏み外している．しかし，それにもまして大きなメリットがあれば敢えて数を倍にしてもいいだろう．例えば，Dirac が「反粒子」を予言したときにも，粒子の数はほぼ倍に増えてしまった．超対称性の有難さは以下の通りである．(1) ヒッグス粒子自身の質量を安定に保つことができる，(2) 標準理論の 3 つの相互作用の力の大きさが高いエネルギースケールで一致し，相互作用の大統一が実現する，(3) 宇宙の暗黒物質の候補となる粒子が存在する，(4) 重力も含む超統一理論で決定的な役割をする（これは私もよく理解していないので踏み込めない），などである．

この様に重要な超対称性も実験家が放っておくはずはない．1980 年代から探索が行われてきたが，いまだに発見されていない．R パリティという量が保存されると，超対称性粒子はペアで生成され，生成された超対称性粒子は最終的には暗黒物質の候補である最も軽い超対称性粒子（LSP）に崩壊する．LSP はニュートリノのように測定器に反応しないので，運動量・エネルギーが失われている事象を探す．

LHC では，強い相互作用で数多く生成されるクォークやグルーオンのパートナーの探索が主である．これらの超対称性粒子はより軽い超対称性粒子に次々と崩壊していき，最後に LSP に崩壊する．その過程で多くの標準理論の粒子を放出する．この中でクォークやグルーオンはジェットと呼ばれる多くの粒子の束となる．W や Z ボゾンからは高エネルギーの孤立したレプトンも放出されることがある．従って，LSP が大きなエネルギーと運動量を持ち去った事象で，いくつかの高エネルギーのジェットや孤立した高エネルギーレプトンの存在する事象を選択する厳しい条件を課して，新粒子の信号/バックグラウンドの比を大きくかつ新粒子の事象が十分な数残るように，これらの条件を最適化する．こののち様々な分布に関して超対称性のない場合の標準理論の予言と比較して統計的に優位な信号があるかどうかを検定する．今のところ LHC でも超対称性の兆候は見えていない．LHC ではヒッグス粒子の質量を安定化するトップクォークのパートナーなどが軽い可能性があるので，これらに特化した探索も行われているが，この場合もまだ兆候が見えていない．ということは，超対称性理論を信ずれば，これらの粒子は標準理論の粒子よりも重く，超対称性は大きく破れている．超対称性そのものだけでなく，この破れのメカニズムも全く新しい物理の方向を決めるものかもしれない．2015 年から始まる LHC の 13 TeV の運転で超対称性粒子が発見されることを期待しよう．超対称性は嘘を嘘で塗り固めたようにも見えるが，ヒッグス粒子も発見され人類の叡智もバカにできないと考えられるので，存在すると期待する．

6. 国際リニアコライダー（International Linear Collider, ILC）

LHC での実験は，クォークがグルーオンで結合された複合粒子である陽子と陽子の衝突のため，陽子の中の素粒子同士の衝突で新粒子ができても，これを傍観していたたくさんのクォークやグルーオンから多くの邪魔な粒子が生成される．また，陽子同士の衝突頻度が大きく，軽い衝突の反応がバンバン生じてこれらが大きなバックグラウンド（パイルアップ）となる．また，中性子などの放射線レベルも高く，耐放射線のコンポーネントを用いて実験装置を組み上げる必要がある．

一方，電子・陽電子衝突は，素粒子同士の，また粒子と反粒子の衝突であり余分な粒子が生ずることなく，素過程が直接観測でき，理論の予測も正確である．さらに，衝突頻度も低く，バックグラウンドも低い．従って，実験はクリーンな環境において精密測定が可能である．しかし，円形加速器では，エネルギーが高いと電子は軽いので磁場で曲がる際に放射光（シンクロトロン放射）を振りほどいてエネルギーを失い，加速が困難となる．粒子が円形加速器一周の間に失うエネルギーは $(E/m)^4/R$ に比例する．ここで，E は粒子 1 個のエネルギー，m は粒子の質量，R は加速器の半径である．E を倍にすると失うエネルギーは 16 倍となる．まさにローン破産の状態である．一方，LHC は陽子の質量は電子の約 1800 倍なので，エネルギー欠損は非常に少なく加速は容易である．実は LHC を回る陽子のエネルギーの上限は，円形加速器に沿って粒子を曲げるための磁場の強度の最大値で制限されている．LHC では，磁場を強くするために超伝導電磁石を使っている．

電子・陽電子の衝突実験は陽子・陽子の衝突実験に比べて，先に述べたように多くのメリットがあるので是非やりたい．そこで，R を ∞ にして放射光が出ない線形加速器を向い合せて建設し，一方から電子，他方から陽電子を加速して正面衝突させる線形衝突型加速器（リニアコライダー）が考案された．リニアコライダーの加速器は，円形加速器のように粒子を回しながら徐々に加速するのではなく，一挙に最高エネルギーまで加速するため，加速器を短くして建設予算を減らすには加速勾配を大きくする必要がある．また，運転経費（消費電力）を減らすには，ビームを極端に絞って衝突頻度を上げる技術が必要であった．リニアコライダーの加速器の研究開発は，1980 年代から日本の高エネルギー研究所（現在の高エネルギー加速器研究機構），米国の SLAC，ドイツの DESY でほぼ同時に始まった．DESY では超伝導の TESLA と常伝導の S-バンド，日本では常伝導の X-バンドと C-バンド，SLAC では X-バンド，また CERN では新しい方式で高いエネルギーを狙う CLIC と，様々な技術が激しい競合状態にあった．リニアコライダーでの物理研究や測定機開発は加速器のデザインにはあまり依らないので，1998 年にはリニアコライダーの物理と測定器の研究のための国際組織を作った．加速器も国際的に協力して 1 基を建設するためには，デザインを 1 つにする必要があり，2004 年には超伝導の線形加速器をベースにする技術を国際的な委員会を作って採択し，2005 年から世界で協力して国際チームを作り，技術開発と設計を行ってきた．昨年の暮れにようやく国際リニアコライダー ILC の技術設計書（TDR）が完成した．

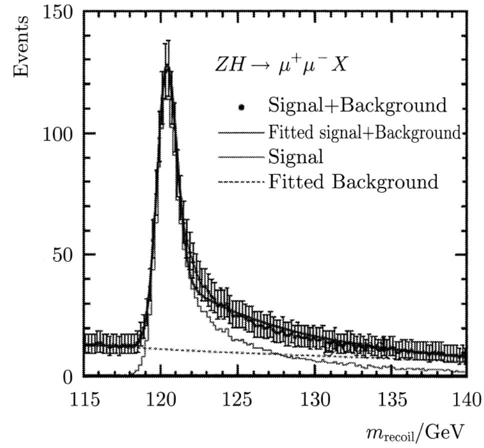


図 4　ILC における $e^+e^- \to ZH$ 過程での $Z \to \mu^+\mu^-$ の反跳質量分布．ヒッグス粒子の質量のところに（ここでは 120 GeV と仮定）ピークが現れる．バックグラウンドは低い（The International Linear Collider Technical Design Report vol.2 p.30 (2013) より）．

ILC でのヒッグス粒子は Z ボゾンとともに生成される（$e^+e^- \to ZH$）．Z ボゾンは LEP で徹底的に研究し尽されており，ヒッグス粒子は Z ボゾンの反跳として生成されるので，Z ボゾンの運動量・エネルギーを測定すれば，図 4 にあるように，反跳質量からヒッグス粒子の生成が歴然と分かる．従って，ヒッグス粒子と他の素粒子との結合定数の測定は，LHC よりも質的に優れている．LHC では多くの素粒子との結合定数が数%～10%程度の誤差を伴うが，ILC では 1%程度またはそれ以下である．この結合定数を正確に測る

ことで標準理論からのずれを測定し，標準理論を超える方向性の解明が期待される．リニアコライダーの利点は，(1) 円形 e^+e^- コライダーのようにシンクロトロン放射を出さない，(2) 長さを両側に延長することでエネルギー拡張が可能である，(3) ビーム中の電子のスピン方向を運動量方向かその逆方向の一方向に揃えて衝突の相互作用を制限することができる（beam polarization），が挙げられる．従って，ILC での実験は低いエネルギーの比較的短い加速器から始めて，段階的に長くしていき，新しい物理の閾値を超えるためにエネルギー増強ができるというメリットがある．ILC は電弱相互作用で生成される暗黒物質やその仲間などの新粒子の発見が期待される加速器である．我が国の高エネルギー研究者コミュニティーは，昨年ヒッグス粒子が発見されたことを契機に，ヒッグス粒子の詳細研究に特化した衝突エネルギー 250 GeV（ヒッグスファクトリー）から始めて，段階的に加速器を長く延長してエネルギーを上げていき，トップクォーク，暗黒物質を構成する粒子，ヒッグス粒子の自己結合などの研究を順次行っていくシナリオを世界に向けて提示した．現在我が国には，北上山地（岩手県，宮城県）と脊振山地（佐賀県，福岡県）の 2 カ所の候補地があり，サイトスタディーを行い，1 カ所に決める努力をしている[*3]．ILC は真の国際的な計画であり，外国も我が国に建設されることを強く希望している．

リニアコライダーでの物理の研究は我が国の素粒子物理の実験家・理論家が協力して 1990 年ごろ故折戸周治東京大学教授が中心となって活発に行われた．当時，理論では東北大学にいた日笠健一氏，山口昌弘氏，岡田安弘氏や東大の大学院生だった村山斉氏，隅野行成氏，実験では高エネルギー研究所の故松井隆幸氏，藤井恵介氏，塚本敏文氏，東大の川越清以氏などが集中して研究し，ヒッグス粒子，超対称性粒子群の発見や詳細研究，トップクォークの研究の方法論を確立していた．これらの研究は，当時世界で他の追随を許さない研究であったし，今でも十分通用するものである．

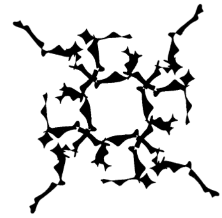
7. 終わりに

前世紀の終わりに，実験と理論の激しい相乗作用によって標準理論が確立した．同時に，実験家は標準理論を超える新粒子・新現象を探し続け，理論家はより大きな枠組みの理論モデルを構築し実験での新現象・新粒子の予言をしてきた．2012 年 7 月のヒッグス粒子の発見は科学史上においても輝かしいものであり，大事なことなので何度も言うが，人類の叡智の勝利である．実験家としては，新現象や新粒子の理論など信用できなくても，理解できなくても，一応聞いたふりをして探してみることが肝要である．第一，理論が本当だったら儲けものである．湯川博士の予言した π 中間子を探した Anderson は予言もされていない μ 粒子を発見し，大統一理論が予言する陽子の崩壊を探した小柴先生は超新星 SN1987A の爆発で生じたニュートリノを見つけたし，トスカネリに触発されてインドを見つけようとしたコロンブスはアメリカ大陸を見つけたし，…予期せぬ発見はやってみなければ生まれない．

（こまみや・さちお，東京大学大学院理学系研究科）

*3) 2013 年 8 月には ILC の日本のサイトは北上山地が選ばれた．

トポロジカル物質の理論的発見



古崎　昭

1. はじめに

イタリアの東端の町トリエステにある国際理論物理学研究所（ICTP）は，理論物理学に顕著な貢献をした研究者に1985年から毎年ディラック・メダルを贈っている．これまでのディラック・メダルの受賞者は，南部陽一郎を含む錚々たるメンバーである．2012年度のディラック・メダル受賞者は，**トポロジカル絶縁体**の理論研究に大きな寄与をしたC.L. KaneとS.-C. Zhang，そしてトポロジカル絶縁体につながる先駆的な研究を行ったF.D.M. Haldaneであり，その授賞式が今年7月にICTPで行われた．トポロジカル絶縁体の理論研究の立役者たちにディラック・メダルが贈られたことは，この分野の発展が物性物理学における最近の大きな成果であるということだけでなく，トポロジカル絶縁体の基礎方程式が相対論的量子力学の**ディラック方程式**であること，さらに，トポロジカル絶縁体の研究が数学的に美しい理論からの予言を実験で検証するという形で進んだ，いわゆるディラック・モード[1)]の研究であることからも興味深い．

トポロジカル絶縁体[2)]は，その内部にいる電子のエネルギー・スペクトル（バンド構造）にギャップが開いている点で普通の絶縁体と同じだが，表面には質量が0の**ディラック・フェルミオン**と同じエネルギー分散を持った電子が存在する点が特徴的な物質である．ディラック表面状態の存在は，トポロジカル絶縁体中の電子波動関数が運動量空間でトポロジカルに非自明な構造を持っていることの帰結である．以下では，トポロジカル絶縁体研究がディラック・モードで進んだ初期の発展の中で，理論と実験の結びつきについて振り返る．

2. チャーン絶縁体

トポロジカル絶縁体のプロトタイプは，**整数量子ホール効果**である．整数量子ホール効果は2次元平面を運動する電子が強い磁場中で示す量子現象で，電流と磁場に垂直な方向に生じるホール電圧 V_{H} と電流 I の比（ホール抵抗）V_{H}/I が素電荷 e とプランク定数 h で決まる量子抵抗 $h/e^2 \approx 25.8\,\mathrm{k\Omega}$ の整数分の1に量子化される．磁場中で電子のエネルギー準位は $E_n = \hbar\omega_c(n+\frac{1}{2})$ のようにランダウ量子化される（$n = 0, 1, 2, \ldots$）．ここで，ω_c はサイクロトロン振動数である．下から ν 番目までのランダウ準位を電子が完全に占有しているとき，ホール抵抗は h/e^2 の $1/\nu$ となる．このことから，整数量子ホール効果が起こるためにはエネルギー準位がランダウ量子化されていることが不可欠だと80年代の半ばまで考えられていた．

Haldaneは1988年に発表した論文[3)]でハニカム格子上の自由電子模型を用いてランダウ準位がなくても整数量子ホール効果が起こり得ることを示し，この常識を覆したのである．ハニカム格子の単位胞はAとBの2つの格子点を含んでいる

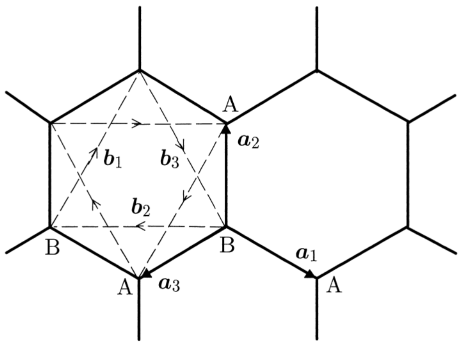


図 1　ハニカム格子.

（図 1）．一つの B 格子点からそれと隣接する 3 つの A 格子点を結ぶベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ とおき，A 格子点同士あるいは B 格子点同士を結ぶベクトルを $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$ と書くことにしよう．Haldane の模型では，ハニカム格子の最近接格子点間のホッピング行列要素を実数で t_1 とし，図 1 の破線のように矢印の向きに次近接格子点間を飛び移るときの行列要素を複素数 $t_2 e^{i\phi}$，逆向きに飛び移るときの行列要素を $t_2 e^{-i\phi}$ とする．正六角形の隣り合う 3 つの頂点（ABA または BAB）がつくる二等辺三角形を反時計回りに一周するときの行列要素の積は $t_1^2 t_2 e^{i\phi}$ なので，この二等辺三角形を貫く磁束が ϕ である．一方，正六角形の辺に沿って一周したときの行列要素の積は t_1^6 で実数なので，正六角形を貫く磁束は 0 である．つまり，ハニカム格子には空間的に変化する磁場がかかっているが，単位胞で空間平均した磁場は 0 である．

波数 $\boldsymbol{k}$ を持った電子の格子点 A と B での波動関数を $(\psi_A, \psi_B)^T$ とするとき，ハミルトニアンは

$$H = \sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} 2t_2 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b}_j + \phi) & t_1 \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_j) \\ t_1 \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_j) & 2t_2 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{b}_j - \phi) \end{pmatrix}$$

で与えられる．ハニカム格子の周期性に対応して，波数 $\boldsymbol{k}$ はハニカム格子を 90 度回転した正六角形のブリルアンゾーン内で定義される．ブリルアンゾーンの 6 頂点のうちで独立な K 点と K′ 点において，内積 $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_3)$ はそれぞれ $(0, 2\pi/3, -2\pi/3)$ と $(2\pi/3, 0, -2\pi/3)$ に等しく，ハミルトニアンの非対角成分（$\propto t_1$）は 0 となることがわかる．K 点（$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{K}$）の付近で $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{q}$ と展開したとき，ハミルトニアンは $\boldsymbol{q} = (q_x, q_y)$ の一次までで

$$H_K(\boldsymbol{q}) = \hbar c(q_x \sigma_x + q_y \sigma_y) + M_+ \sigma_z \quad (1)$$

と近似できる．ここで

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{（パウリ行列）}$$

$$c = \frac{\sqrt{3}\, t_1}{2\hbar}, \qquad M_\pm = M \pm 3\sqrt{3}\, t_2 \sin\phi.$$

格子点 A と B で $+M$ と $-M$ のポテンシャルエネルギーの差があるとした．同様に，K′ 点近傍（$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{K}' + \boldsymbol{q}'$）でハミルトニアンは

$$H_{K'}(\boldsymbol{q}') = \hbar c(-q'_x \sigma_x + q'_y \sigma_y) + M_- \sigma_z \quad (2)$$

となる．基底状態はすべての負エネルギー状態に電子が詰まった状態であり，有効ハミルトニアン H_K と $H_{K'}$ は，基底状態からの低エネルギー励起が「光速」c で運動する質量 $M_\pm$ のディラック粒子であることを示している．

Haldane 模型では磁束 $\phi \neq 0$ のときホール効果が生じ得る．ホール伝導度 σ_{H} は絶対零度で TKNN 公式[4]

$$\sigma_{\mathrm{H}} = -\frac{e^2}{\hbar} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) \quad (3)$$

を用いて計算できる．ここで，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}) = i\langle \boldsymbol{k}| \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} |\boldsymbol{k}\rangle \quad (4)$$

は，ハミルトニアン H の負の固有エネルギー状態 $|\boldsymbol{k}\rangle$ に対するベリー接続である．TKNN 公式 (3) は，σ_{H} がベリー曲率のブリルアンゾーンでの積分に等しいことを示している．この積分は**チャーン数**とよばれるトポロジカル不変量で，必ず整数値をとる．実際にこの積分を実行すると，

$$\sigma_{\mathrm{H}} = \frac{e^2}{2h}[\mathrm{sgn}(M_-) - \mathrm{sgn}(M_+)] \quad (5)$$

が得られて，σ_{H} は e^2/h の整数倍 $(0, \pm 1)$ に量子

化されることがわかる．式 (5) は，H_K と $H_{K'}$ に対して独立に $\sigma_{\rm H}$ を計算して得られる結果，$\sigma_{\rm H} = \mp(e^2/2h){\rm sgn}(M_\pm)$，の和に等しい．ディラック電子の質量 $M_\pm$ の符号で $\sigma_{\rm H}$ が決まることは，$(2+1)$ 次元のディラック・フェルミオンのパリティ・アノマリーとして知られている[5]．

Haldane 模型では，磁場の空間平均は 0 なのでランダウ準位は存在しない．それにもかかわらず整数量子ホール効果が起こるのは，電子が詰まっている負エネルギー状態（価電子バンド）が 0 でないチャーン数を持つからである．このようにランダウ準位を持たず，非零のチャーン数で特徴づけられるバンド絶縁体を**チャーン絶縁体**とよぶ．整数量子ホール効果には，（ランダウ準位ができている場合も含めて）価電子バンドが非自明なチャーン数を持っていることが本質的である．トポロジカル数（チャーン数）が変化するときには必ず $M_+ = 0$ あるいは $M_- = 0$ となり，バンドギャップが閉じることに注意しよう．

トポロジカル数の異なる絶縁体の界面には，必ずギャップレス励起が存在する．その例として，有効ハミルトニアン H_K の質量 M_+ が空間的にゆるやかに，例えば $M_+(x) = M_+^0 \tanh(x/\xi)$ のように変化している場合を考えよう（M_+^0 は正の定数）．$M_+(x)$ は $x < 0$ と $x > 0$ の領域でそれぞれ負と正の値をとるので，チャーン数が 1 だけ異なる絶縁体が $x = 0$ で接していることに相当する．H_K の波数 $\boldsymbol{q}$ を空間微分 $-i\partial/\partial\boldsymbol{r}$ で代用すると，実空間でのシュレーディンガー方程式

$$[-i\hbar c(\sigma_x\partial_x + \sigma_y\partial_y) + M_+(x)\sigma_z]\psi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon\psi(\boldsymbol{r})$$

は，エネルギー $\varepsilon = \hbar ck$ の固有状態として，界面 $x = 0$ 近傍に束縛されているが $+y$ 方向に平面波として進行する境界状態

$$\psi(\boldsymbol{r}) = N\exp\left[iky - \frac{1}{\hbar c}\int_0^x dx' M_+(x')\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

を持っている（N は規格化定数）．この境界状態は，整数量子ホール系の**カイラルエッジ状態**に他ならない．

ここまでの議論では，電子のスピン自由度を無視してきた．H_K や $H_{K'}$ に現れたパウリ行列は AB 副格子の自由度に対応する．次節では電子スピンが主役を演じる．

3. 2 次元 $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル絶縁体

Kane は Mele との共同研究で[6]，Haldane 模型を**時間反転対称**な系に拡張する toy model を提案した．2004 年の Geim と Novoselov らの実験に始まるグラフェン研究の興隆に触発されて，Kane らはグラフェンを舞台とした新しい量子効果はないだろうかと考えたのである．グラフェンは図 1 のハニカム格子状に炭素原子が並んだ 2 次元物質である．Kane らは，Haldane 模型に電子のスピン自由度を取り入れ，磁束 ϕ は**スピン軌道相互作用**によって実効的に生じるものとした．スピン 1/2 の電子は，スピンの量子化軸をハニカム格子面に垂直にとって，上向きスピン（$s_z = +1, \uparrow$）と下向きスピン（$s_z = -1, \downarrow$）の 2 種類が存在する．Kane らは電子系が時間反転で対称であると要請し，上向きスピンの電子と下向きスピンの電子では Haldane 模型の磁束パラメータ ϕ が逆符号になっているような模型を考えた．すなわち，ハミルトニアンは $H_\uparrow(\phi) \oplus H_\downarrow(-\phi)$ としたのである．時間反転変換で磁束 $\phi \to -\phi$ かつスピン $s_z \to -s_z$ なので，ハミルトニアンは時間反転で不変である．上向きスピン電子と下向きスピン電子は独立に整数量子ホール状態（$\sigma_{\rm H}^\uparrow = +e^2/h, \sigma_{\rm H}^\downarrow = -e^2/h$）になっているとすれば，トータルの電荷ではホール効果は生じていないが（$\sigma_{\rm H}^\uparrow + \sigma_{\rm H}^\downarrow = 0$），スピン s_z に関しては量子ホール効果が起きており（$\sigma_{\rm H}^\uparrow - \sigma_{\rm H}^\downarrow = 2e^2/h$），系の端に上向きスピン電子と下向きスピン電子が逆向きに運動するエッジ状態が存在する．この現象が**量子スピンホール効果**であり，端に沿って運動するモードを**ヘリカルエッジ状態**とよぶ（図 2 上図）．

この量子スピンホール効果は Haldane 模型の自明な拡張なので，理論的には何も驚くべきことはない．Kane と Mele の研究で本質的に新しかったのは，スピン軌道相互作用によって上向きスピン

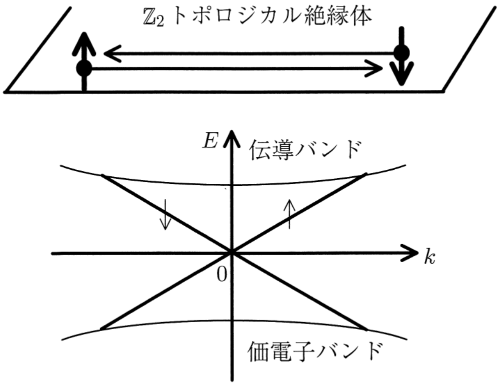


図 2 $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル絶縁体の端に沿って運動するヘリカルエッジ状態（上図）は，ほぼ線形のエネルギー分散を持っている（下図）．

電子を下向きスピン電子に散乱する過程（とその逆過程）があって s_z がよい量子数でなくなっても端状態は安定に存在することを示し，さらに $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル数を導入したことである．ハミルトニアン $H_\uparrow(\phi) + H_\downarrow(-\phi)$ にスピン散乱を加えた模型は Kane–Mele 模型とよばれている．

s_z が保存量であって量子スピンホール効果が起きている状況では，図 2 下図に示しているように上向きスピン電子のエッジ状態と下向きスピン電子のエッジ状態のエネルギー分散が波数 $k = 0$ で交差している*1)．時間反転変換で $k \to -k$ なので，上向きスピン電子と下向きスピン電子のエネルギー・スペクトルは $k \to -k$ としたときに互いに移り変わらないといけないからである．さて，スピン軌道相互作用のために s_z が保存しないときでも，時間反転変換 T でハミルトニアンは不変である．量子力学によれば，スピン 1/2 の粒子に対する時間反転 $T = is_y\mathcal{K}$ は $T^2 = -1$ をみたし*2)，時間反転変換を 2 回行ったときに波動関数は符号を変えなければいけない．この帰結として，時間反転対称なハミルトニアンのエネルギー固有値は必ず少なくとも 2 重に縮退していることを示すことができる．これを**クラマースの定理**という．この定理によって，$k = 0$ での上向きスピン電子と下向きスピン電子のエッジ状態の縮退は決して解消しないことがわかる．

Kane と Mele は時間反転対称な系ではクラマース対のヘリカルエッジ状態が安定に存在し得ることを示しただけでなく，このエッジ状態が存在するときには，価電子バンドが（チャーン数のような整数 $\mathbb{Z}$ ではなく）非自明な $\mathbb{Z}_2$ のトポロジカル数を持っていることを明らかにした*3)．この **$\mathbb{Z}_2$ トポロジカル数**は，価電子バンドと伝導バンドの間のギャップ中の任意のエネルギー ε に対して，$k > 0$ でエッジ状態のエネルギー分散が $E(k) = \varepsilon$ となる回数の偶奇に対応している．時間反転対称なトポロジカル絶縁体が $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル数によって特徴づけられることは，ヘリカルエッジ状態の安定性について考えることで理解できる．波数 k のエッジ状態に対するハミルトニアンを

$$H_{\mathrm{edge}}(k) = \hbar v k s_z \tag{6}$$

と書けば，$s_z = 1$ の状態はエネルギー分散 $E = \hbar v k$, $s_z = -1$ の状態はエネルギー分散 $E = -\hbar v k$ を持ち，これらの状態がクラマース対をなす．これらの状態を結合して $k = 0$ にギャップを開けるような相互作用項（例えば $V_x s_x$ や $V_y s_y$）は時間反転対称性 $s_y H^*_{\mathrm{edge}}(-k) s_y = H_{\mathrm{edge}}(k)$ を破るために許されない，というのがクラマースの定理の意味するところであった．さて，今度はクラマース対をなすエッジ状態が 2 組あったとして，ハミルトニアンを

$$H^{(2)}_{\mathrm{edge}} = \begin{pmatrix} \hbar v_1 k s_z + \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & \hbar v_2 k s_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

とする（ε_0 は 2 組のクラマース対のエネルギー差）．このハミルトニアンに対する摂動として

$$V = \begin{pmatrix} 0 & iV_x s_x + iV_y s_y \\ -iV_x s_x - iV_y s_y & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

を加えると（$V_{x,y} \in \mathbb{R}$），2 組のヘリカルエッジ状態のエネルギー分散が交差する点（$k = \pm k_0$）で

*1) 結晶の並進対称性を考えると，（格子定数を 1 としたとき）$k + 2\pi \equiv k$ なので $k = \pi$ で交差がおきてもよい．

*2) $\mathcal{K}$ は複素共役演算子．s_x, s_y, s_z はスピンのパウリ行列．

*3) 空間反転対称性のある物質では，$\mathbb{Z}_2$ トポロジカル数は波動関数のパリティ固有値から計算することができる[7]．

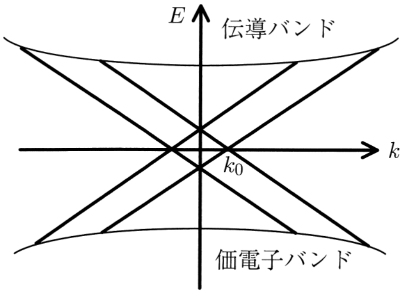


図 3 2 組のヘリカルエッジ状態の準位交差点 $k = \pm k_0$ で，摂動 V によりギャップが開く．

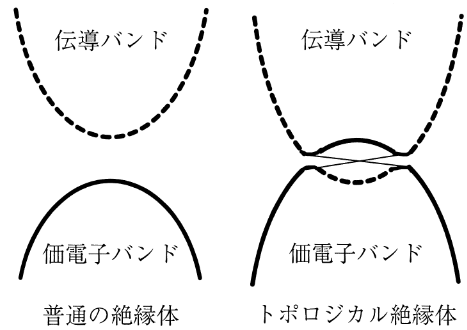


図 4 普通の絶縁体とトポロジカル絶縁体．トポロジカル絶縁体ではバンド反転が起きている．

ギャップが開く（図 3）．ここで，式 (8) の摂動項は時間反転対称性を保っている（$s_y V^* s_y = V$）ことに注意しよう．すなわち，2 組のクラマース対のエネルギー縮退点は時間反転対称な摂動に対して不安定である．上の考察を一般化すると，偶数組のヘリカルエッジ状態は時間反転対称な摂動に対して不安定でギャップが開くが，奇数組のヘリカルエッジ状態では必ず一組のヘリカルエッジ状態が任意の時間反転対称な摂動のもとでもギャップを開かずに安定に存在することが結論できる．この偶奇性が $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル数の所以である．

Haldane 模型の低エネルギー励起に対する有効ハミルトニアン H_K や $H_{K'}$ を参考にすれば，Kane–Mele 模型の有効ハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{KM}} = \hbar c(q_x \sigma_x \tau_z + q_y \sigma_y) + \Delta_{\mathrm{SO}} \sigma_z \tau_z s_z \quad (9)$$

と書ける．ここで，$\tau_z = 1, -1$ は K 点と K′ 点を指定する index で，Δ_{SO} はスピン軌道相互作用の結合定数，すなわちディラック・フェルミオンの質量パラメータ（Haldane 模型での $t_2 \sin\phi$ に相当）である*4)．Δ_{SO} の符号によって，$\mathbb{Z}_2$ トポロジカル数が 0（普通の絶縁体）と 1（トポロジカル絶縁体）のどちらかになるかが決まる．$\boldsymbol{q} = (q_x, q_y) = 0$ での H_{KM} のエネルギー固有値が $\pm\Delta_{\mathrm{SO}}$ であることから，普通の絶縁体とトポロジカル絶縁体では $\boldsymbol{q} = 0$ でのエネルギー準位の上下が逆転していることがわかる（図 4）．このような逆転現象をエネルギーバンドが反転しているという．$\mathbb{Z}_2$ トポロジカル絶縁体の実現には，スピン軌道相互作用によって**バンド反転**が起きていることが必要である．

*4) s_z を保存しないラシュバ型スピン軌道相互作用は省略した．

Kane と Mele はグラフェンをモデルとする $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル絶縁体の理論を提案したが，炭素原子は原子量が小さくスピン軌道相互作用が弱いため，残念ながらグラフェンがトポロジカル絶縁体となることは望めない．そこで，よりスピン軌道相互作用の強い物質で**バンド反転**が起きている物質を見つけることが必要であった．

S.-C. Zhang は，半導体で電子スピンを使って情報処理を行うスピントロニクスの分野の会議に参加していたとき，Molenkamp が彼のグループで長年取り組んでいる HgTe の実験の発表の中で見せた様々な半導体のバンドギャップの表に着目した．その表は，HgTe がバンドギャップが負の物質，すなわちバンド反転が起きている物質であることを主張していたのである．S.-C. Zhang らは直ちにこの物質について詳しく検討し，HgTe の量子井戸構造にできる 2 次元電子系は量子スピンホール効果を示すだろうと 2006 年に理論的に予言した[8]．そして翌年，Molenkamp のグループの実験によってこれが実証されたのである[9]．

4. 3 次元 $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル絶縁体

2 次元電子系の量子スピンホール効果（$\mathbb{Z}_2$ トポロジカル絶縁体）が現実になった頃，トポロジカル

絶縁体の理論にはさらに大きな進展があった．$\mathbb{Z}_2$ トポロジカル絶縁体の概念が，3次元系に拡張されたのである[10]．3次元の $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル絶縁体は，任意の方向で切った表面上にハミルトニアン

$$H_{\mathrm{surface}} = v\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{s} \tag{10}$$

で記述されるような，質量0のディラック電子が存在する絶縁体である．ここで，$\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$ と $\boldsymbol{s} = (s_x, s_y)$ は表面に沿った方向の運動量とスピンである．3次元トポロジカル絶縁体の有効模型は 4×4 行列のディラック・ハミルトニアンなので，トポロジカル絶縁体内部とその外側（真空あるいは普通の絶縁体）で質量 M の符号が異なっているとすれば，その界面（すなわちトポロジカル絶縁体の表面）に(10)式の線形エネルギー分散を持ったギャップレス励起が束縛状態として現れるのである．従って，3次元トポロジカル絶縁体の探索も，バンド反転した絶縁体を見つければよいことになる．スピン軌道相互作用の強い3次元物質としては以前からビスマスが有名であったが，ビスマスは半金属である．そこで，Kaneらはビスマスの化合物に目をつけ，BiとSbの合金がトポロジカル絶縁体となるだろうと予想し[7]，その予言はすぐにHasanらの実験によって確かめられた[11]．続いて，S.-C. Zhangらはバンド計算から Bi_2Se_3 や Bi_2Te_3 などの物質がトポロジカル絶縁体になることを指摘し，これも実験的に直ちに確認された．3次元トポロジカル絶縁体の実験については，本特集の安藤氏の記事に詳しい．

5. さらなる発展

$\mathbb{Z}_2$ トポロジカル絶縁体の研究の進展とは独立に，2次元カイラル p 波超伝導体に代表される**トポロジカル超伝導体**に関する研究が2000年頃から盛んに行われている[12]．トポロジカル超伝導体は，超伝導体内部の準粒子励起にはギャップが開いているが，超伝導体の端（表面）にはギャップレスの準粒子励起がアンドレーエフ束縛状態として存在する超伝導体であり，$\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}_2$ のトポロジカル不変量を持っている．ある種のトポロジカル超伝導体の端状態や磁束中の束縛状態は，電子と正孔の等しい重みの重ね合わせにより，粒子と反粒子が区別できない**マヨラナ粒子**となる．現在，その実験的検証が世界的な競争となっている[13]．

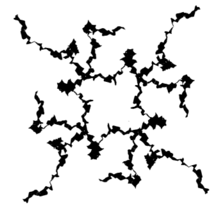
トポロジカル超伝導体のtoy modelもディラック・ハミルトニアンである．南部表示のBCSハミルトニアンにおいて，p 波超伝導秩序変数と化学ポテンシャルがディラック粒子の運動エネルギー項と質量に対応する．従って，チャーン絶縁体や $\mathbb{Z}_2$ トポロジカル絶縁体からトポロジカル超伝導体まで含めたトポロジカル物質全般を統一的に記述し，分類することができる[14,15]．この分類理論は，励起ギャップのある自由フェルミオン系のトポロジカルな分類の一般論であり，アンダーソン局在論[14]やK理論が応用された[15]．しかし，相互作用している多粒子系のトポロジカル相の分類はまだ完成していない[16]．

参考文献

1) 南部陽一郎，『素粒子論の発展』（江沢洋編，岩波書店，2009年），p.29「湯川と朝永の遺産」．
2) M.Z. Hasan and C.L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
3) F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2015 (1988).
4) D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, and M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982).
5) R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **27**, 2375 (1984).
6) C.L. Kane and E.J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146802 (2005); **95**, 226801 (2005).
7) L. Fu and C.L. Kane, *Phys. Rev. B* **76**, 045302 (2007).
8) B.A. Bernevig, T.L. Hughes, and S.-C. Zhang, *Science* **314**, 1757 (2006).
9) M. König *et al.*, *Science* **318**, 766 (2007).
10) J.E. Moore and L. Balents, *Phys. Rev. B* **75**, 121306 (2007); R. Roy, arXiv:cond-mat/0607531; L. Fu, C.L. Kane, and E.J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 106803 (2007).
11) D. Hsieh *et al.*, *Nature* **452**, 970 (2008).
12) N. Read and D. Green, *Phys. Rev. B* **61**, 10267 (2000); A. Kitaev, arXiv:cond-mat/0010440.
13) 古崎昭，パリティ **28**, No.1, p.18 (2013).
14) A.P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A.W.W. Ludwig, *Phys. Rev. B* **78**, 195125 (2008).
15) A. Kitaev, arXiv:0901.2688.
16) 例えば，X. Chen *et al.*, *Science* **338**, 1604 (2012).

（ふるさき・あきら，理化学研究所）

物性物理学と新規物質
超伝導体とトポロジカル絶縁体を例として



安藤　陽一

1. はじめに

読者の皆さんは「物性物理学を進展させる新規物質」というと，どのようなイメージを持たれるだろうか？これまでに知られていなかったような複雑な結晶構造，これまで試されていなかったような複雑な合金組成―そのようなイメージをお持ちであれば，それは残念ながら正しくない．というのも，物性物理学における新規物質とは，必ずしも「それまで知られていなかった物質」ではないからである．物質自体は既知でも，新たな性質・特性を示すことが見つかると新規物質となる．例えば，最近筆者らが「トポロジカル結晶絶縁体」という新しいタイプのトポロジカル物質であることを発見したテルル化錫（SnTe）は，単純な岩塩型の結晶構造を持ち，この物質自体はナローギャップ半導体として40年以上も前から研究されてきた．しかしこの物質の表面に，トポロジカルな起源を持つディラック電子が存在することに，これまで誰も気づかなかったのである．本稿ではこのような，物性物理学を発展させる推進力となってきた新規物質を話の軸にして，物性物理学における理論と実験のつながりを紹介する．

2. 物性物理学の目指すもの

本論に入る前に，物性物理学の意義，存在価値について説明しておきたい．というのも，筆者が教養部の学生だった頃に持っていたのと同様の誤解をお持ちの読者も一部におられるのでは，と推察されるからである．その誤解とは，物性物理学は既に明らかにされた物理の基本法則を実際の物質に「応用」する学問であって，物理の基本原理そのものを究める学問ではない，という考えである．しかし実際には，多数の原子が集まってできた物質の性質を支配する基本原理は，少数原子の世界や素粒子の世界を支配する原理とは質的に異なっており，単なる応用問題として理解できるものではない．例えば，超伝導体を構成する個々の原子に対するシュレーディンガー方程式を，そのまま結晶構造を考えに入れて多体方程式に拡張しても，超伝導がなぜ起こるのかは理解できない．超伝導現象を支配する基本原理は，多数の粒子が集まったときだけに現れる極めて特徴的な物理法則である．

乱れた電子系の理論でノーベル物理学賞を受賞したAndersonは，この事情を “More is different” と表現した．つまり，系の構成要素の数（複雑さの階層）が変わると，その系を支配する基本原理も変わってくる，ということである（図1）．より複雑な系を支配する法則や基本原理は，より単純な階層における法則の単なる応用としては理解できない．従って物性物理学も基礎物理学の一分野であり，物性物理学者の目標は，物質の世界に特有の基本原理を究めることである．

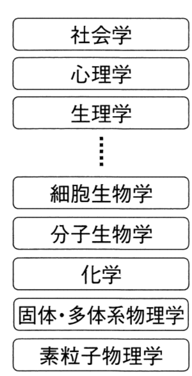


図1　Andersonが提唱した “More is different” という考え方における学問の複雑さの階層．上の階層はその下の階層における法則に従うが，各階層でさらに独自の法則や基本原理が生じる．

さてそのような物性物理学において，特に興味があるのが，新しい量子力学的現象を示す物質の発見である．物理学は実証科学であるから，新しい量子力学的現象が「予言」されただけではあまり大きな出来事にはならず，それを実際に示す物質が発見されて初めて学問が大きく進展する．量子力学は，基本的にはミクロな世界を支配する法則であるが，それが物質の不思議な性質としてマクロなスケールで現れることがあり，そのような現象が新たに見つかれば，それは確実に未知の基本原理の存在を示している．

3. 超伝導体

3.1 超伝導物質の発見と超伝導現象の解明

物性物理学の歴史において超伝導現象は重要な役割を果たしてきたが，それは1911年にOnnesが水銀を液体ヘリウムで冷やしたら4.2 K以下で突然抵抗がゼロになることを発見したことに始まる．これは超伝導現象の発見であると同時に，超伝導体Hgという新規物質の発見でもあった．この発見は，当時の重要問題であった，金属の残留抵抗の問題（金属を冷やしていくと抵抗が減少するが，その減少はどこかで止まるのか，それとも下がり続けるのか）に答えを出すために行った実験において得られた，予想外の結果である．Onnesはこの発見のすぐ後，1913年に低温物理学に対する貢献でノーベル賞を受賞している．

この発見が量子力学の建設に先んじていたこともあり，その後，超伝導現象が起こる仕組みが理解されるまで半世紀近くかかった．これは，新規物質の発見が理論に重要な課題を突きつけた顕著な例である．天才として名高いLandauやFeynmanもこの問題に挑戦したが解けなかった，という話は有名である．この難問を解いたのがBardeen, Cooper, Schriefferの3人で，彼らの頭文字を冠したBCS理論が発表されたのは1957年である．この理論の基本は次の通りである．物質中では格子振動（フォノン）を媒介として電子間に引力が働き，電子が2個ずつ対を組む（クーパー対の形成）．このクーパー対が凝縮してBCS波動関数で記述される多体量子状態を形成したのが超伝導状態である．普通の金属状態は結晶中の各格子点に存在する原子の波動関数の重ね合わせとして基本的には記述できるが，超伝導状態はこれとは本質的に異なり，μm程度の長さにわたって量子力学的位相が揃ったBCS波動関数が基底状態として現れる．従って超伝導は，極めて劇的な形で現れた巨視的量子現象である．BCSの3人はこの業績で1972年にノーベル賞を受賞した．

3.2 高温超伝導体

超伝導に関してはもう一つ，全く理論的に予想されていなかった新規物質の発見が物理学を大きく進展させた例がある．それが高温超伝導体である．BCS理論が確立して以来，1980年代まで超伝導転移温度（T_c）の最高値は30 Kを超えることはなかった．これはエネルギースケールの小さいフォノンを媒介とする超伝導現象が本質的に持つ限界として認識され，「BCSの壁」と呼ばれていた．ところが1986年にBednorzとMüllerが，このBCSの壁を越えるT_cを持つ銅酸化物の超伝導体を発見したのである．彼らが発見した超伝導体は$La_{2-x}Ba_xCuO_4$で，この物質の最高T_cは35 Kだったが，この発見に触発されて類似の銅酸化物超伝導体の探索が多くの研究者によって世界中で行われ，1987年には93 Kの最高T_cを持つ$YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$が，また1988年には110 Kの最高T_cを持つ$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10+\delta}$が発見された．これらの発見はすべて実験家の勘と経験によるものである（なお$La_{2-x}Ba_xCuO_4$という物質自体はこれ以前から知られていたが，それが超伝導体であることはわかっていなかった）．このBCSの壁を越える高温超伝導がどのような仕組みで起こるのかはまだ解明されておらず，現代物理学の最大の難問の一つである．BednorzとMüllerはこの業績で1987年にノーベル賞を受賞した．

高温超伝導を理論的に理解することの難しさは，電子間の強いクーロン相互作用（つまり負電荷どうしの反発力）が高温超伝導体の物理を支配していることにあると考えられている．通常の金属中では，電子間のクーロン相互作用は遮蔽されて弱くなるので，その効果は摂動として取り扱うことができるが，高温超伝導体ではクーロン相互作用が一番重要なエネルギースケールとなり，摂動では取り扱うことができない．このような状況にある物質は一般に**強相関電子系**[1]と呼ばれている．それを理解するためには，強く相互作用している多体系を支配する基本原理を解明する必要があるが，これは非常に難しく，物性物理学における主要なテーマの一つとなっている．

3.3 夢のエキシトン超伝導体

このように超伝導に関しては，実験家による新規物質の発見が理論の発展を促す，という歴史が続いてきた．2008年に細野らによる$LaFeAsO_{1-x}F_x$超伝導体の発見で幕を開けた新しい鉄系高温超伝導体[2]の研

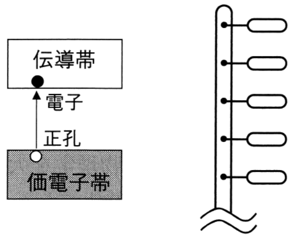


図 2　半導体中におけるエキシトン励起の概念図（左）と Little の有機超伝導体の概念図（右）.

究も，その例外ではない．そんな中で，エキシトン超伝導に関するエピソードを紹介しよう．フォノンを媒介とする超伝導に BCS の壁があることは既に述べたが，これを打ち破る試みの一つとして，フォノンの代わりにエキシトンを媒介とする超伝導の可能性を，1964 年に Little が提唱した．エキシトンとは，半導体においてバンドギャップを超えるエネルギーが与えられたときに電子と正孔が対になって励起されたもの（図 2 左）であり，フォノンよりもずっと大きなエネルギースケールを持つ．金属中ではエキシトンは生じないが，Little は有機ポリマーで電気伝導を担う「背骨」を作り，そこにエキシトン励起を担う側鎖をくっつければ（図 2 右)，室温を超える T_c を持つ高温超伝導体を人工的に作ることができる，と提案し，実験家に大きな刺激を与えた．結局この Little の超伝導を実現する物質は開発されていないが，1980 年の Jerome らによる最初の有機超伝導体の発見は，この流れの中でなされた．

この有機 1 次元超伝導体より現実的なエキシトン超伝導の舞台も模索された．1973 年には BCS 理論の完成を主導した Bardeen が，半導体の上に金属の薄膜を形成し，金属中の電子が隣接する半導体中のエキシトンを媒介としてクーパー対を作ることができれば，800 K を超える T_c も可能，という提案を行った．この予言に触発された実験も行われたが，結局エキシトン超伝導体はまだ発見されていない．このように，画期的な超伝導体を理論的に予言する試みは，これまですべて失敗に終わっている．

4. トポロジカル絶縁体

次に**トポロジカル絶縁体**[3)]の話をしよう．トポロジカル絶縁体も超伝導体と同様，物質における未知の基本原理を明らかにした新規物質である．その基本原理とは，量子力学におけるトポロジーの役割である．量子力学では物質の状態を波動関数によって記述するが，この波動関数は通常，適当な直交基底の線形結合として表される．この直交基底が張るベクトル空間がヒルベルト空間であり，物質の状態を記述する波動関数は，このヒルベルト空間における多様体と考えることができる．量子力学にこのような抽象的な空間と多様体が伴うことは初期の頃から認識されていた．しかしその多様体の持つトポロジーを考えることが物質の性質を理解する上で重要であることは，近年まで認識されていなかった．この新しい認識を作ったのが，トポロジカル絶縁体である．

4.1 量子ホール系

トポロジカル絶縁体の歴史は 1980 年まで遡る．この年 von Klitzing が，半導体シリコンの表面にゲート電圧をかけたときに生じる 2 次元電子系が強磁場中で示すホール伝導度が e^2/h の整数倍に量子化される現象を発見した（e は素電荷，h はプランク定数である)．この現象は量子ホール効果と呼ばれるようになり，その後，十分に移動度の高い 2 次元電子系においては例外なく観測されることがわかった．そのため von Klitzing の発見は新規物質の発見とは言い難いが，重要な新規現象の発見であった．そして 1982 年に Thouless, Kohmoto, Nightingale, den Nijs の 4 人によって，この現象の本質的な起源が，磁場中の 2 次元電子系を記述する波動関数が非自明なトポロジーを持つことにあることが解明された．

トポロジーにおいては，物の形を**トポロジカル不変量**という整数値によって分類する[4)]．例えばドーナツとアンパンをトポロジカルに分類するときは，穴の数がトポロジカル不変量となる（図 3)．同様に量子ホール系のトポロジーは，巻き付き数というトポロジカル不変量で規定される．この巻き付き数とは，結晶の周期性に従って系を一周期分変化させたときに，波動関数の位相が 2π の何倍変わるかを表す整数値である．ゼロ磁場中の半導体や真空では，この巻き付き数はゼロであり，トポロジーは「自明」である．しかし 2 次元電子系に磁場をかけると Landau 量子化と呼ばれる現象が起こり，電子の状態は飛び飛びの固有エネルギーを持つ Landau 準位に量子化される．磁場を変化させる

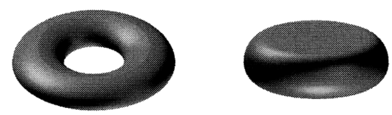


図 3　ドーナツとアンパンのトポロジーの違い.

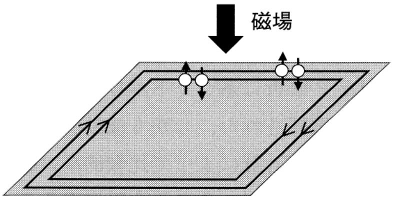


図 4　量子ホール系のエッジ伝導チャンネルの概念図．電子はスピン偏極していない．この図は巻き付き数 2 の場合に対応し，エッジ伝導チャンネルが 2 本あるため，ホール伝導度は $2e^2/h$ である．

と Landau 準位のエネルギーも変化する．ホール伝導度の量子化が観測されるのは，ちょうどあるところの Landau 準位まで電子が詰まり，その上の Landau 準位が空いている状態になったときだが，これは一種の絶縁体状態である．しかもこのとき，上記の巻き付き数はゼロでない整数値をとるため，系は非自明な巻き付き数で規定される「トポロジカルな」絶縁体となっている．この意味で，量子ホール系はトポロジカル絶縁体の最初の例であった．

重要なのは，絶縁体中の波動関数が非自明なトポロジーを持つと，必ず境界にギャップレスの伝導状態が現れることである．これを**バルク–エッジ対応**と呼ぶが，その理由は次の通りである．トポロジカルな絶縁体が持つトポロジカル不変量はエネルギーギャップの存在によって守られており，エネルギーギャップを開けたまま波動関数を連続的に変形させてもトポロジカル不変量は変化しない．一方，真空も励起エネルギーにギャップの開いた絶縁体であり，そのトポロジカル不変量はゼロである．従って，トポロジカルな絶縁体が真空と接しているとき，その境界でトポロジカル不変量が有限の値からゼロに変化するためには，必ず一旦ギャップが閉じなければならない．これは即ち，境界には必ずギャップレスの伝導状態が現れることを意味する．量子ホール系の場合は，巻き付き数と同じ数の伝導チャンネルがエッジに現れ，その各チャンネルが e^2/h ずつホール伝導度に寄与する（図 4）．このため，巻き付き数が n であればホール伝導度は ne^2/h となり，e^2/h の整数倍に量子化される，というわけである．

4.2 時間反転対称トポロジカル絶縁体

上記のように，物質中の波動関数が非自明なトポロジーを取り得ることは 1980 年代から知られていたが，これは 2 次元系という制限された状況で磁場をかけて時間反転対称性を破ったときにのみ現れる特殊な現象，と長らく考えられていた．しかし最近，非自明なトポロジーは 3 次元で磁場がかかっていない普通の状況でも起こり得ることが明らかになり，それまでの常識が覆った．今日では，このような時間反転対称性を破らずにトポロジカルになっている絶縁体のことを，一般的にトポロジカル絶縁体と呼んでいる．

このトポロジカル絶縁体を規定するトポロジーは **$\boldsymbol{Z_2}$ トポロジー**と呼ばれ，そのトポロジカル不変量は 0 か 1 のどちらかの値をとる．この Z_2 トポロジーを決めるのは，運動量空間中で結晶の周期性を反映した高対称点において，波動関数が時間反転操作で符号を変えるか否か，という二者択一であり，その結果として，トポロジカル不変量も 0 か 1 かの二者択一となる[3]．結晶が空間反転対称性を持っていると Z_2 トポロジーの決定はより簡単になり，上記の高対称点における波動関数のパリティをかけ合わせたものとなる[3]．従ってごく大雑把に言えば，絶縁体の波動関数のパリティが負であればトポロジカル不変量が 1 となり，パリティが正である真空とは異なるトポロジーを持つことになる．そうすると上述のバルク–エッジ対応の原理により，界面でトポロジカル不変量が 1 から 0 に変化するために必ずギャップレスの伝導状態が現れることになる．

4.3 2 次元トポロジカル絶縁体

この時間反転対称な絶縁体における Z_2 トポロジーの存在は，2005 年に Kane と Mele によって，まず 2 次元系に対して理論的に発見された．この歴史的な発見の契機となったのは，量子化された**スピンホール効果**を実現するにはどうしたらよいか，という問題だった．スピンホール効果とは，金属や半導体に電流を流したときに，スピン軌道相互作用の効果によって電子の運動方向と垂直な方向の一方にアップスピン，他方にダウンスピンが偏極して現れる現象である（図 5 左）．もし絶縁体において，量子ホール効果のようなエッジ伝導状態が存在して，その中でアップとダウンのスピンを持つ電子が互いに逆向きに進むとしたら，そこに電流を流すと量子化されたスピンホール効果が現れる

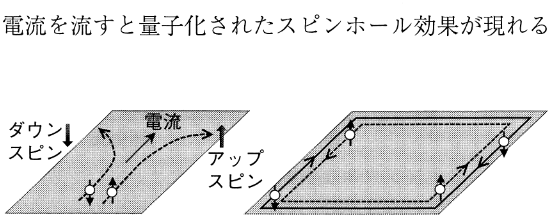


図 5　左はスピンホール効果の概念図．右に示すようなスピン偏極を持ったエッジ伝導チャンネルが存在すると，そこに電流を流すことによって量子スピンホール効果が生じる．

（図 5 右）．Kane と Mele は，そのような特殊なエッジ伝導状態が計算上実際に現れることが示せる理論モデルを構築し，そのモデル系がエッジ伝導状態を持つ根本的な理由が新規な Z_2 トポロジーにあることまで証明した．ただし彼らのモデルは強いスピン軌道相互作用を持つグラフェンという現実には存在しないものだったので，この理論の実験的検証は難しかった．

しかし翌 2006 年には Bernevig，Hughes，Zhang（BHZ）の 3 人が，HgTe のバンド構造に基づいたより現実的なモデルで，Kane–Mele 理論と同様の非自明な Z_2 トポロジーの存在を示した．しかも彼らは HgTe を CdTe で挟んだ量子井戸構造で 2 次元トポロジカル絶縁体が実現する，という具体的な予言をした．この BHZ の予言は，HgTe/CdTe の量子井戸構造を作製する技術を既に持っていた Molenkamp らのグループによって，早くも 2007 年に検証された．この発見は，量子力学におけるトポロジーの役割を理解する，という遠大なテーマが目前に横たわっていることを物性物理学者が悟る重要な契機となった．

4.4 3 次元トポロジカル絶縁体

また理論家たちは，Kane と Mele による Z_2 トポロジーの理論的発見の翌年，もともと 2 次元系について提唱された Z_2 トポロジーの概念が 3 次元系にも拡張できることに気がついた．特に Fu と Kane は 2006 年に，波動関数のパリティ解析に基づいて，$Bi_{1-x}Sb_x$ という合金が 3 次元トポロジカル絶縁体であり，それを確認するには角度分解光電子分光による測定で表面状態がフェルミレベルを奇数回横切ることを見ればよい，という具体的な予言を行った（図 6）．この予言は 2008 年に Hasan らによって検証され，3 次元の一見普通に見える絶縁体の中にもトポロジカルなものがあることが明らかになった．

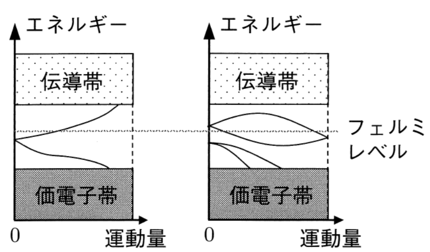


図 6　トポロジカルな表面状態（左）とトポロジカルでない表面状態（右）の比較．物質中のエネルギー固有状態はフェルミレベルまで占有されるが，このフェルミレベルがギャップ内のどこにあっても，表面状態がフェルミレベルを横切る回数は左では奇数回，右では偶数回である．

この $Bi_{1-x}Sb_x$ に関する予言の検証によって，波動関数のパリティ解析に基づくトポロジカル絶縁体の予想の有効性が確認された．しかも波動関数のパリティは第一原理バンド計算によって比較的高い確度で決定することができるので，その後今日に至るまで，トポロジカル絶縁体新物質の発見は理論主導で行われてきている．トポロジカル絶縁体であることを実験的に確定するには，$Bi_{1-x}Sb_x$ のときと同様に角度分解光電子分光で表面状態を測定するのが定石となっている．この分野が大きな注目を浴びていることもあり，最近は理論によるトポロジカル絶縁体の予想の先陣争い，および実験によるその検証の先陣争いの両方とも，熾烈な競争になっている．その具体例を以下に紹介しよう[3]．

$Bi_{1-x}Sb_x$ の次に発見された 3 次元トポロジカル絶縁体は，Bi_2Se_3 と Bi_2Te_3 という同じ構造を持つ二元化合物だったが，これらは 2009 年に Zhang らによって予言され，同年中に，Hasan らが Bi_2Se_3 を，また Hasan らと Shen らの 2 つのグループがほぼ同時に Bi_2Te_3 を，それぞれ実験で確かめた．その次に発見されたのは $TlBiSe_2$ という三元化合物だったが，これについては 2010 年に Zhang らと Bansil らがほぼ同時に理論予想を行い，その数カ月後にまず筆者らが，それに続いて木村らと Shen らも独立に，これを実験で確かめた．

この $TlBiSe_2$ に関する理論計算の論文では，同じ構造を持つ $TlBiS_2$ もトポロジカル絶縁体であると予想されていた．しかし筆者らは $TlBiSe_2$ がトポロジカルであることを確認したすぐ後に $TlBiS_2$ の測定も行って，この予想が正しくないことに気づいた．興味深いことに $TlBiSe_2$ と $TlBiS_2$ は互いに混ざりあい，$TlBiS_{2-x}Se_x$ という混晶を形成するので，この混晶で x を系統的に変化させるとトポロジカル絶縁体相と普通の絶縁体相の間の量子相転移が追えることになる．このアイデアに基づいて実験を行ったところ，Hasan らのグループが一足先に同じアイデアによる実験結果を *Science* 誌に発表したが，筆者らも独立に行った結果を *Nature Physics* 誌に発表した．このトポロジカル量子相転移の発見は，トポロジカル絶縁体の研究の中では珍しく，理論家の裏をかいたもの，と言えなくもない．

$TlBiS_{2-x}Se_x$ の実験でさらに興味深いのが，（Hasan らの論文では報告されなかったが）筆者らの実験では

トポロジカル量子相転移近傍のトポロジカル相側で，ギャップレスであるはずの表面状態にギャップが開く現象が見つかったことである．理論的には磁性の導入などによって表面で時間反転対称性を破らない限り，トポロジカル絶縁体の表面状態にはギャップは開かないことになっている．$\mathrm{TlBiS}_{2-x}\mathrm{Se}_x$ は非磁性なので，観測された表面状態のギャップは全く予想外のものであった．

ギャップレス表面状態中の電子は，質量項をゼロに置いたディラック方程式で記述されるため，**質量ゼロのディラック電子**と呼ばれている．これに対してギャップの開いた表面状態中の電子は質量項を有限にしたディラック方程式に従う．$\mathrm{TlBiS}_{2-x}\mathrm{Se}_x$ では人為的に対称性を破ることはしていないので，この物質のトポロジカル量子相転移近傍で観測された現象は，自発的対称性の破れに伴うディラック電子の質量獲得，と見ることができそうである．これはいかにもヒッグス機構を髣髴とさせるようなシナリオで大変興味深いが，未だにその本当の起源はわかっていない．

4.5 トポロジカル結晶絶縁体

上で紹介したトポロジカル絶縁体を規定する Z_2 トポロジーは，系が時間反転対称性を持つときに定義されるものであるが，最近，他の対称性に基づいて定義されるトポロジーの研究が盛んになっている[3]．特に結晶が有する点群対称性に基づくトポロジーで規定される「トポロジカル結晶絶縁体」の存在を，Fu が 2011 年に提唱した．さらに Fu らは 2012 年に具体的に SnTe が Z_2 トポロジーでは自明だが結晶の鏡面対称性に基づくトポロジーでは非自明になり，独特の構造を持つ表面状態が現れることを予言した．この予想は数カ月のうちに筆者らが検証したが，ほぼ同時に Story らと Hasan らがそれぞれ類似の $\mathrm{Pb}_{1-x}\mathrm{Sn}_x\mathrm{Se}$ と $\mathrm{Pb}_{1-x}\mathrm{Sn}_x\mathrm{Te}$ において，やはりトポロジカル結晶絶縁体相の存在を実証した．これらの物質は新しいタイプのトポロジカル物質として，物質中の量子力学におけるトポロジーの役割を理解するのに貢献することが期待される．

5. おわりに

本稿で紹介したように，超伝導体の歴史において理論は実験をフォローする立場だったが，トポロジカル絶縁体においてはそれが逆転し，理論が実験をリードしている．この違いは，超伝導の発現が様々な相互作用の微妙なバランスで決まるのに対して，絶縁体のトポロジカル不変量は波動関数のパリティという明快な性質で決まることに起因している．最近，**トポロジカル超伝導体**[5]という新しいトポロジカル物質の研究が流行し始めているが，ここでは理論と実験の立場はもっと拮抗している．トポロジカル超伝導体には 2 つの可能性があり，一つは人工的な接合構造でトポロジカルな超伝導状態を誘起するもので，これは理論が主導している．もう一つはバルクの超伝導体が自然にトポロジカルになっている物質で，その探索は理論と実験が協調して進められている．筆者らは最近 $\mathrm{Cu}_x\mathrm{Bi}_2\mathrm{Se}_3$ と $\mathrm{Sn}_{1-x}\mathrm{In}_x\mathrm{Te}$ という 2 つの超伝導体がバルクのトポロジカル超伝導体の有力候補物質であることを実験で示したが，これは理論家との共同作業であった．トポロジカル超伝導体の境界には**マヨラナ粒子**という，粒子がそれ自身の反粒子でもある奇妙な性質を持つ準粒子が現れるため，物性物理学における魅力的なフロンティアとして注目を集めている[6]．もしクーロン相互作用によってトポロジカル相が発現している強相関電子系物質が見つかったら，それも非常に魅力的なフロンティアになるだろう．今後の物性物理学の発展は，理論と実験が刺激しあってそのようなフロンティアを開拓していくことにかかっている．

参考文献

1) 伊達宗行（監）:『大学院物性物理 2―強相関電子系』，講談社 (1997).
2) 細野秀雄，松石聡，野村尚利，平松秀典：「鉄系超伝導物質」，日本物理学会誌 **64**，807–817 (2009).
3) Y. Ando: “Topological Insulator Materials”, arXiv:1304.5693 (2013).
4) 中原幹夫：『理論物理学のための幾何学とトポロジー I』，ピアソン・エデュケーション (2000).
5) 佐藤昌利：「トポロジカル超伝導体入門」，物性研究 **94**，311–349 (2010).
6) F. Wilczek: “Majorana returns”, *Nature Physics* **5**, 614–618 (2009).

（あんどう・よういち，大阪大学産業科学研究所）

重力（理論）
重力波源と高エネルギー天体の記述

田 中　貴 浩

1. はじめに

この原稿を依頼されたとき，おりしも私の所属する基礎物理学研究所において YKIS2013「Gravitational waves—Revolution in Astronomy and Astrophysics—」が開催され，本稿に関連する最新の研究発表をまとめて聞く機会に恵まれました．本稿は，この会議の内容をやさしく解説したものです．基礎物理学研究所は，湯川秀樹博士のノーベル賞授賞を記念して設立され，研究者間の交流促進の場として理論物理学の発展に貢献してきました．今年 60 周年を迎える研究所の記念の年に研究所の最重要とされる研究会で重力波がテーマに取り上げられたことは，現在の物理学における重力波の重要性を象徴しているのではないかと思います．

2. 重力波とは

重力相互作用も，電磁気相互作用と同様に場の理論として記述されます．電価を持ったものが振動することでまわりの電場が振動し，それが波となって伝播するものが電磁波です．それと同じように物質があるとそのまわりに重力場が作られます．その重力場を作っている物質が振動することで，重力場も振動し，波として伝播するものが**重力波**です．一般相対論における重力場は，時空の曲り具合を表す**計量** $g_{\mu\nu}$ によって表されます．2 階テンソル場である計量は微小な 2 点間 $dx^\mu \sim x'^\mu - x^\mu$ の 2 乗距離を $ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ の形で与えます．この計量の振動が波となって伝わるわけですから，この波が通過すると 2 点間の距離が変化することになります．この 2 点間の距離の変化を捉えるということが重力波を検出するということです．

3. 観測の進展

Joseph Weber が金属棒の共振による振動を検出することによる重力波検出実験を開始したのは 1960 年代初頭でした．それから半世紀以上の歳月を経て，近い将来，ほぼ同時に 3 つの検出方法による重力波検出が実現されるという歴史的瞬間が訪れようとしています．ここで言う 3 つの方法とは，**重力波レーザー干渉計**，**パルサータイミングアレイ**（PTA），**宇宙背景放射の B-モード偏光観測**，の 3 つです．これらは観測する重力波の周波数が異なり，それぞれにターゲットとしている重力波源が異なっています．

地上の重力波干渉計に関しては，すでにアメリカの **LIGO** 実験が 4 km のアーム長を持つ干渉計を 2 台，フランス-イタリアの共同による Virgo 実験もピサ郊外に 3 km のアーム長を持つ干渉計を 1 台，有しています．重力波干渉計は 2 つのアームを往来するレーザー光の間の干渉を用いて，アーム長の微小な時間変化の差を検出することによって重力波を捉える装置です．これらの干渉計は現在，検出感度の向上のための改修をおこなっている最中です．この改修で約 10 倍かそれ以上の感度向上が予定されています．10 倍の感度を得るということは 10 倍遠くの重力波源を観測できるということを意味し，結果として 1000 倍の体積が観測可能になることを意味します．つまり，1000 年待って初めて見つかると期待されるような事象だったものが，観測を始めて 1 年程度で観測されるということになります．日本においても，3 km のアーム長を持つ **KAGRA** 計画が進行中であり，LIGO や Virgo と肩を並べる感度をそれらの改修の完了と同時期に実現することを目指しています．最初の重力波検出は 2017 年までに，遅くても 2020 年には可能だろう，という

のが共通の認識です．これまでの重力波干渉計の歴史と成果，将来の計画については，本特集の梶田氏・田越氏の記事を参照ください．

PTA というのは，パルサーと呼ばれる天体を用いた重力波検出法です．星が核反応を終えて超新星爆発を起こした結果，星全体がほぼ中性子でできた高密度天体が作られる場合があります．これが**中性子星**です．この中性子星が磁場を持ち，その自転に合わせてパルス状に電波を発するような天体が**パルサー**です．パルサーからの電波パルスの周期は時計として非常に正確で，それらのパルサーの中でもパルス周期が短く安定しているミリ秒パルサーと呼ばれる種族のパルサーの周期の乱れを調べることで重力波を検出するというのが PTA による重力波検出です．主な重力波源としては超巨大ブラックホールの合体が挙げられます．銀河どうしの合体に伴って，大半の銀河の中心核に付随していると考えられる超巨大ブラックホールも一緒に合体するものと思われています．最も合体頻度を高く見積もったシナリオによれば，既に巨大ブラックホール合体の際に放出する重力波に対する観測的制限がつき始めていると言われます．質のよいデータを取得することのできるパルサーの数が増えると，重力波シグナルがはっきりとノイズから浮き出て見えてくるので，周期の安定したミリ秒パルサーを多数発見することが感度向上の点で重要です．将来，スクエア・キロメーター・アレイ[1)]が実現されると，データ取得できるミリ秒パルサーの数が飛躍的に増加することで検出限界の大幅な向上が期待されています．

宇宙背景放射の B-モード偏光観測というのは，天体現象を起源とする重力波観測とはかなり違ったものを対象としています．重力波観測から我々が得ることのできる情報が持つ魅力の一つは，重力波の高い透過性にあるとよく言われます．重力波と物質の相互作用は非常に弱いものです．地上での重力波直接検出が非常に困難な理由はこの相互作用の弱さにあります．しかし逆に，ひとたび重力波が生成されれば，その伝播を遮るものは何もないということが言えます．その利点が活かされる究極の観測が宇宙初期に起源をもつ重力波の検出です．宇宙背景放射というのは，宇宙が高温高密度だった頃のなごりで，現在，宇宙のあらゆる方向からやってきている絶対温度で約 2.725 K に対応する電波です．宇宙背景放射の偏光の非等方性を観測することによって，宇宙論的な長さスケールを波長に持つ重力波を観測できるというのです．銀河団や銀河と言った宇宙の大域的な構造の種となる密度ゆらぎは宇宙初期のインフレーションと呼ばれる宇宙の加速膨張期に作られたと考えられています．このとき，密度ゆらぎと同時に重力波も生成されたと考えるのが自然です．重力波があると宇宙背景放射の電波の偏極に関する非等方性に B-モードと呼ばれる偏極パターンのシグナルが現れます．この偏極パターンの存在を検出することで宇宙初期に生成された重力波を捉えます．Planck 衛星が多くの観測結果をこの 3 月に発表しました[2)]が，偏光に関する非等方性のマップの発表も近日発表される予定です．Planck 衛星だけではなく，その他にも地上や気球からの観測でも B-モードの観測は可能であり，現在も着実に観測と新しい計画が進んでいます．

■ 4. 超新星からの重力波 ■

超新星爆発は，星が燃料を使いはたした後にコアが重力崩壊を起こし，その際に生じるショックで外層が吹き飛ばされる現象です．超新星爆発は昔から知られている天体現象ですが，その爆発のメカニズムは未だにはっきりしていません．超新星爆発のエネルギー全体では 10^{53} erg 程度ですが，爆発により放出される物質の運動エネルギーが占めるのは 10^{51} erg 程度で，放出されるエネルギーの 99%はニュートリノによって放出されます．コアの重力崩壊で中心密度が上がってくると内部のほうは圧力が上がり支えられますが，外部からはさらに物質が降着してきます．ここに衝撃波が生じます．後からの降着によって内側に向かって押しこめられようとする衝撃波を，ニュートリノのエネルギーを利用して外向きに膨張させることができれば，超新星爆発を起こすことができます．

まず，1 次元（球対称）のシミュレーションでは親星が軽い場合にしか爆発するモデルを与えることができていません．2 次元（軸対称）計算では対流に伴う不安定性や Standing Accretion Shock Instability（SASI）等が効いてくることで爆発させることができると言われています．SASI とは衝撃波面とコア部分に形成された原始中性子星表面の間を音波などが行き来する間に，双極子モードを含むモードが大きく励起される現象であると考えられています．これらの不安定性の効果で，物質がかき混ぜられることで，外から降着してくる物質がまっすぐに降着することが妨げられます．それにより，降着物質がニュートリノによる加熱を受け

る時間が増加するために，爆発が可能になるものと考えられています．現在までに行われた2次元のシミュレーションでは，計算終了時点でぎりぎり爆発するといった程度であって，実際の超新星爆発の爆発エネルギー 10^{51} erg を説明するのは難しいかもしれないとされています．3次元シミュレーションを行う場合も，ニュートリノによる加熱が重要な役割を果たすので，位置と運動量の6次元の相空間中でのニュートリノの輻射輸送問題を解かなければなりませんが，現在のところこの問題を解くには計算機の能力が不足しており，何らかの近似的な取り扱いが必要です．現在，3次元計算もおこなわれてはいますが，3次元計算が2次元計算に比べてより強い爆発を与えるかどうかという点に関して決着はついていません．

コア崩壊型超新星からの重力波としては，初期の対流，SASI（この場合，コアの収縮に伴って徐々に高い振動数に変化することが予想される），爆発によるエネルギー放出（重力波メモリー効果と呼ばれる現象で非常に低周波の重力波が放出される）などによる，様々な振動数の重力波放出が考えられます．重力波の観測感度が（地球から約20 Mpcの距離にある）おとめ座銀河団でのイベントにまで届くと，観測できる銀河の数が増えて重力波イベントの頻度は非常に高くなるのですが，KAGRAなどの重力波検出器がそこまでの感度に到達するとはなかなか期待できません．振幅の不定性がありますが，観測可能となるのは1 Mpcよりも近い近傍銀河群の範囲であろうと考えられています．この数字は，一つの銀河あたりでおよそ100年に一度の割合で超新星は起こっているので，数十年に一度は起こることが期待される程度です．超新星からの重力波が検出されれば，超新星爆発のメカニズムに関して有益な情報がもたらされることが期待されます．

超新星に関しては，**スーパーカミオカンデ**などによるニュートリノの観測からも爆発の詳細に関する重要な情報が得られます．さらに，やってくるニュートリノと反ニュートリノを区別することができれば，より詳しい解析が可能になりますが，そのための開発試験プロジェクト **EGADS** も進められています[3]．

■ 5. コンパクト天体の連星合体 ■

コンパクト天体というと，中性子星（NS）やブラックホール（BH）が挙げられます．これらのコンパクト天体からなる連星は重力波放出による散逸の効果で軌道半径を縮め，やがて合体します．合体の最後の時期になると軌道の進化の速度が十分に速いため，軌道の進化の様子が重力波シグナルの振動数の変化として観測できます．このような振動数が次第に高くなる連星系からの重力波シグナルを**チャープシグナル**と呼びます．重力波シグナルは一般に微弱ですが，理論的な波形の予測ができる連星系の場合には，理論波形とデータとの相関解析をおこなうことで微弱な重力波でも検出することが可能になります．そのため，連星合体は最初の重力波直接検出にとって絶好のターゲットということになります．

重力波の観測データから合体イベントを抽出し，連星の諸パラメータを決定するには，連星系からの重力波波形の理論的予測が必要不可欠です．波形の解析的な予測には軌道運動の速度 v が光速 c に比べ小さいとして摂動的に展開するポストニュートン展開法が用いられます．しかしながら，合体直前には v/c は $O(1)$ に近づきます．したがって，合体直前から合体後に関しては，数値的に一般相対論の方程式を解く方法を使って波形を求める必要があります．全質量が $20\,M_{\rm sol}$ 以上になると，合体の瞬間がaLIGO（改修後のLIGOをadvanced LIGOの略としてaLIGOと書くことにします）やKAGRAの観測帯域に入ってきます．

一方，理論的な連星合体の頻度の予測には，まだまだ大きな不定性があります（表1参照）．理論的な予想の不定性の大きな要因は重力波放射によって合体することが期待される十分に近づいた連星系を形成するシナリオの複雑さにあります．このような連星を形成するには，一方の星が超新星爆発を経てコンパクト星になった段階で，相手の星の外層に飲み込まれる共通外層フェーズと呼ばれるフェーズを通過する必要があります．このフェーズの間に軌道角運動量を外層に捨て去ることで，連星間の距離を一気に縮めることで宇宙年齢以内に合体できる距離にまで連星を接近させるのですが，その詳細は良くわかっていません．BH形成の場合においては，形成時にBHが大きな反跳を受ける可能性もありますが，その大きさをどのように見積もるかも連星系形成の割合を大きく変化させます．

このような不定性はあるものの，NS-NSの連星に関しては，理論的な予測だけでなく，観測からもイベント頻度を決めることが可能です．我々の銀河系内に9つのNS-NS連星が見つかっており，そのうち5個が宇宙年齢程度以内で合体する近接連星です．これらが，銀河によらずに典型的なNS-NS連星の分布を反映して

表 1 aLIGO で観測可能な連星合体が一年あたりに何回起こるかの予想．ここでの数字は文献 4) より引用しているが，今回の会議では多少異なる値が示されました．

	少なめの見積もり	最も確からしい値	多めの見積もり
NS-NS	0.4	40	400
NS-BH	0.2	10	300
BH-BH	0.4	20	1000

いるとするならば，連星合体の頻度は我々銀河系相当の銀河一個あたり，$3–190 \times 10^{-6}$/年 と評価されます．これは，星の進化計算からの推定値 $0.3–77 \times 10^{-6}$/年とおおむね合っています．

6. 同時観測

重力波研究において，現在の大きな関心事の一つは，NS-NS，NS-BH，BH-BH 連星の合体がそれぞれどのような既知，または，未知の天体現象に対応しているのであろうかということです．コンパクト連星合体の電磁波対応天体として真っ先に候補に挙がるものは短 γ-線バースト（GRB）です．**γ-線バースト**は宇宙で最も激しい天体現象で，γ-線の放射の継続時間は，数ミリ秒から長いものでは 1000 秒程度になるものもあります．バーストは相対論的なジェットに関わる何らかの相互作用で生み出されていると考えられています．γ-線バーストの継続時間の分布には 2 つのピークがあることが知られています．それらは継続時間 2 秒を境にして**短 GRB** と**長 GRB** にわけられます．それらのイベント数の比率はおよそ 1 : 3 です．

長 GRB には超新星爆発が付随する場合が数例見つかっており，非常に重い星の爆発に対応していると予想されます．これは，長 GRB が常に星形成の盛んな銀河（つまり，非常に重い星がまだ超新星爆発を起こしていない銀河）に付随しているという事実とも整合します．一方，短 GRB は星形成が既に終了している楕円銀河の中でも起こっているようで，超新星が付随するイベントも見つかっていません．短 GRB の起こった天球上での位置と銀河分布との相関からは，短 GRB が銀河の外に飛び出して低密度領域でも起こっているということを推測させます[5]．

NS-NS 連星合体が短 GRB に対応しているものとして，NS-NS 連星合体の頻度を観測されている短 GRB の頻度 $10\,\mathrm{Gpc}^{-3}$/年を元に評価してみましょう．ジェットブレイクと呼ばれる GRB 後の残光の光度曲線（光度–時間関係）が折れ曲がる時刻からはジェットの広がっている角度 θ が $10°$ 程度と見積もることができます．γ-線の放射はジェットの広がりの中に限られるので，ジェットの広がり角の外では GRB としては観測されません．この $10°$ という角度を採用し，観測されている短 GRB より実際の合体イベント数は 50 倍多いものと仮定すると，aLIGO で重力波源となるような 200 Mpc 以内の連星合体の頻度は約 20 イベント/年となります．これは，先の NS-NS 合体の頻度の予想とおおむね合致しています．

重力波で観測可能な範囲内で，短 GRB の起きる確率は低い[6]わけですが，その原因がジェットのビーミング因子によるものであるならば，ジェットが我々の視線方向を向いていないせいで GRB としては観測されないイベントが他にたくさんあることになります．このようなジェットは星間物質と相互作用を起こし残光を発生すると考えられますが，これらはジェットほどの強い指向性を持たず，ジェットの 2 倍の角度程度までは見えると思われています[6]．また，短 GRB の 25% には継続時間 100 秒程度の X 線放射があることがわかっていますが，どの程度の角度の広がりを持った放射なのかは不明です．放射の広がりが大きいならば，NS-NS 連星合体からの重力波が観測される 200 Mpc の距離からの X 線の放射を，国際宇宙ステーションに搭載されている日本の X 線モニター **MAXI** で観測することができます．現在，さらに観測視野の大きい 92 分で全天の 80% をスキャンする観測装置 **WFMAXI** の開発が進められています[3]．

しかし，ジェット以外の質量放出もあると期待されます（図 1 参照）．質量放出の機構としては，NS が潮汐破壊されることによるものと NS どうしの衝突の際の衝撃波によるものなど，様々な質量放出を引き起こすメカニズムが考えられます．このようなメカニズムでの質量放出にはジェットのような鋭い指向性はなく，あらゆる方向に物質が放出されます．数値シミュレーションからは質量放出の量は $M = 0.01–0.001\,M_{\mathrm{sol}}$ で，放出の速度は $v \sim 0.1c$ 程度と見積もられています．当初は，$0.1c$ の速度で $0.01\,M_{\mathrm{sol}}$ の質量放出があるとして，10^{41} erg/秒程度の放射が見込まれていました．理論的に予測されるこのようなイベントは**キロ新星**とかマクロ新星と呼ばれています．

キロ新星が光るのは，鉄よりも重い放射性元素が作られて，それらの崩壊で光るのだと考えられています．

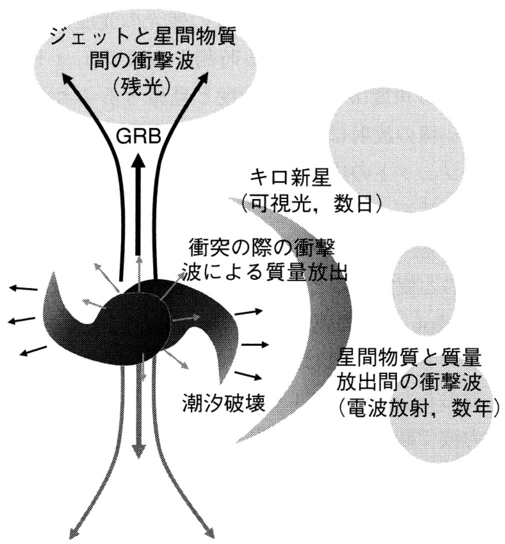


図 1　考えられる中性子星合体からの電磁波の放射の想像図．文献 6) を参考に作成．

このような重い原子核は太陽系にも存在していますがそれらがどこで作られたのかという問題が，一方にはあります．星の中での核反応では安定な鉄族元素までしか生成されません．陽子捕獲反応ではクーロン障壁のために大きな原子核を作ることは難しいので，重い原子核を作るには中性子捕獲反応を考える必要があります．コア崩壊型の超新星爆発における元素合成を考えても，非常に重い側の元素を作るのは難しいと考えられています．そのような議論からも，NS 合体で質量放出が起こり，重い原子核が合成されたという考えが浮かび上がってきます．非常に最近になって，このような重い原子核による光の吸収率が評価し直された結果，光り始める時刻は数日後となり，フラックスも当初思っていたよりも低いと見積もられています．これが正しければ，観測のためには 4 m 級，あるいは 8 m 級の望遠鏡が必要という話になりますが，実際のところは測ってみないとわからないという側面もあります．天体観測は夜にしかおこなえませんし，強い放射の継続時間が短いという可能性も考えると，日本も含めた全世界的な観測網の構築が求められます[3)]．

この放出された質量が星間物質と相互作用をすることで，電波を出すことも期待されます．こちらのほうは放出された物質の質量と，それに衝突して掃き集められたまわりのガスの質量が同程度になるあたりで光り始めるので，その時刻は 1 年後から数年後と評価されます．まわりのガス密度が通常の銀河内の平均密度である $1\,\mathrm{cm}^{-3}$ なら検出可能ですが，$10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-3}$ まで下がると観測されそうにないと言われています．

重力波検出をトリガーにして電磁波対応天体の同時観測が実際に可能かどうかは，重力波観測から天球上の位置をどれだけすばやく，かつ，正確に特定できるかということにかかっています．この重力波による観測の角度分解能に関しては本特集の梶田氏・田越氏の記事にも触れられています．

■　7. 中性子星の状態方程式の区別　■

近年，約 $2\,M_{\mathrm{sol}}$ の中性子星が発見され[7)]，中性子星の可能な最大質量の条件から高密度核物質の状態方程式に対する制限が厳しくなってきています．やわらかい状態方程式では重たい中性子星を支えることができないからです．連星の合体の波形からも中性子星を構成する高密度核物質の状態方程式に対して制限がつけられると考えられています．その際に，中性子星にはたらく潮汐力に対する四重極変形の度合いを表すパラメータ λ が最も厳しく制限される量となります．

まず，合体までの軌道運動をしている段階においても，徐々に潮汐変形の効果で軌道の進化が修正を受け，結果として重力波波形に変化がもたらされます．この効果もさることながら，やはり，合体時付近の進化もこのパラメータ λ によって大きく左右されます．合体時付近の重力波の振幅が最大になる振動数と λ の間には強い相関があることが示されています[8)]．すなわち，この λ の値を通じて状態方程式に制限がつけられるということになります．

■　8. 宇宙論へのインパクト　■

重力波イベント数が十分にたまると，その統計的性質に宇宙論的な意味も出てきます．50 個の NS-NS 連星合体イベントが観測されると，電磁対応天体が見つからなくてもハッブル定数を 1%よりも高い精度で決定できます．また，重力波源として，個々の天体現象ではなく宇宙初期に生成された背景重力波もあります．この背景重力波は通常，重力波のエネルギー密度が宇宙の全エネルギー密度に占める割合 Ω_{GW} でもって表します．この Ω_{GW} に関する制限も aLIGO では $\Omega_{\mathrm{GW}} < 10^{-9}$ のレベルに達する予定です．この程度の振幅であれば，宇宙初期の相転移現象からの重力波など様々な生成メカニズムが存在しており，意味のある観測的制限を与え始めます．

9. 一般相対論の検証

ハルス-テイラーの中性子星連星の軌道周期の変化率が重力波放出によるものとした計算と一致することから，重力波の存在自体はすでに検証されているということができます．それでは重力波が直接検証されたときに，重力理論の理解としてどのようなインパクトが期待できるでしょうか．

まず，一般相対論はBHの存在を予言します．現在では多くのBH候補天体が存在しますが，それらから"候補天体"の文字を外す決定的証拠を得ることは，なかなか簡単ではありません．NS-NS連星の合体後の天体の質量がNSの最大質量よりも重ければ，最終的にBHが形成されると考えられます．BHが生まれるときに，BHの**準固有振動**と呼ばれる減衰振動する重力波が放出されます．形成されるBHの質量とスピンはおおよそ予想されるので，この準固有振動の周期と減衰率も予想がつきます．したがって，この重力波シグナルを捉えることでBHが生成されたことの決定的証拠となると期待されます．

一方，重力波の存在自体は証明がされたとはいうものの，重力波が本当に伝播してきているのかは直接観測して初めて証明されたということになります．これは実験物理学的には大きな成果であることは疑いありません．それでは，理論的にみて，重力波の伝播に疑念を抱かせるような，具体的で魅力的な修正重力理論があるかというと，それほど簡単には見当たりません．しかし，それは，重力波の伝播の変更という視点で重力理論の拡張や修正の可能性が，これまであまり調べられていないせいかも知れません．実際，我々は最近，計量が2つ存在するような重力理論で2つの重力波モードの間でニュートリノ振動のような現象を起こし，かつ，既存の観測からも排除されないモデルを構成するが可能であることを示しました[9]．

他にも，重力理論の拡張・修正という観点では様々な理論モデルが議論されています．そのようなモデルの多くは，ダークエネルギーやダークマターといった，宇宙論モデルを構築する上で必要となるが得体のしれない構成要素を，重力理論の修正で一気に説明しようという試みに端を発しています．それらには近年研究が進んだブレーンワールド模型や，古くから議論されている，重力にスカラー場を結合させた理論や，高階微分を含む理論など，様々な提案がなされています．これらの可能なモデルの詳細を議論することは，紙数

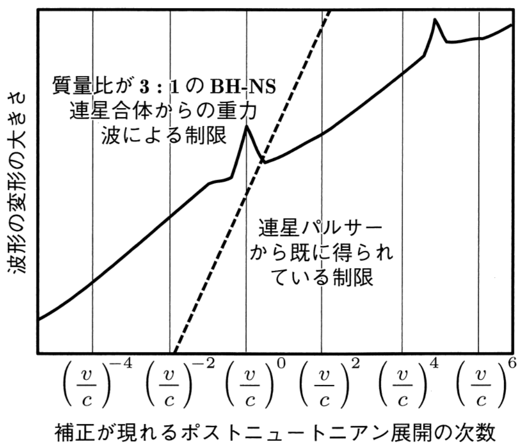


図2 重力波観測による重力理論の修正に対する制限と連星パルサーによる制限の比較[10]．

の制限をはるかに超えてしまうので無理ですが，そのような詳細に依らずに重力波観測による重力理論のテストがどのような制限をもたらすのかを議論することができます．図2は，あるPN展開のオーダーから補正が始まる場合に，どの程度の大きさの修正に対して重力波観測から制限がつくのかをプロットした図です．ここでは縦軸の振幅の定義を与えていませんが，連星パルサーの観測からついている制限を同時にプロットしてあるので比較できると思います．ここに描かれた線は一つの重力波イベントから得られる制限なので，たくさんの連星合体が観測されるようになれば，重力波からの制限は厳しくなっていきます．この図をみると，当然ながら，PN展開の高次（すなわちv/cの高次）において，はじめて補正が現れるようなモデルでは，連星系からの重力波の観測から重力理論の修正に対して，これまでにない新しい制限が容易につくことがわかります．

10. 宇宙重力波アンテナ

最後に，**宇宙重力波アンテナ**も忘れてはなりません．宇宙に重力波検出器を持ち出す理由は，長いアーム長を容易に実現できることと，地球の地面振動から逃れることができることという大きな利点があるからです．波長の長い，すなわち，低振動数の重力波をターゲットとしようとすれば，アーム長を飛躍的に長くする必要がありますが，それを地上で実現することはできません．

ヨーロッパのESAとアメリカのNASAが共同で進めていた**LISA**計画という宇宙重力波アンテナの計画

は，NASA が手を引いてしまったために，規模を縮小して eLISA として現在は ESA が単独で計画を進めています．また，日本でも **DECIGO** 計画という宇宙重力波アンテナの計画が検討されています[11]．

宇宙重力波アンテナが狙う低振動数重力波源は，中間質量の BH から太陽質量程度のコンパクト星の連星まで様々です．特に，極限まで感度を追求したバージョンの DECIGO 計画においては，宇宙の果てまでの NS-NS 連星合体イベントを見通すことが可能になり，連星系の進化を宇宙の進化と合わせて鮮明に描き出すことが可能になると考えられます．また，低振動数の重力波源は継続時間も長いので，一年以上にわたる継続的観測が可能になります．そうすると，波形の解析から地球の公転半径と重力波波長の比程度の精度で，天球上での重力波源の方向を特定することが可能になり，飛躍的に位置決定精度を高めることができます．また，インフレーションを起源とする $\Omega_{\rm GW} \sim 10^{-16}$ 程度の振幅の背景重力波さえもターゲットにできるようになると考えられています．

■　11. 終わりに　■

かなり駆け足で重力波がもたらす物理について概観してきましたが，ここで取り上げた話題の他にも，パルサー，低質量 X 線連星，BH-NS，BH-BH 連星合体や，宇宙ひもなど様々な重力波源があります．さらに，思いもよらない現象が待っているかもしれません．その一方で，重力波検出にあたっては，波形の予測ができないと大幅に感度を失うことになります．したがって，思いもかけない可能性をも含めて，重力波信号を見逃すことのないような，細心の注意が要求される研究課題であり，実験家によってのみならず，理論家にとっても大きなチャレンジとなっています．

謝辞

執筆に当たっては，YKIS2013「Gravitational waves —Revolution in Astronomy and Astrophysics—」のたくさんの講演を参考にさせていただきました．加えて，新学術領域研究「重力波天体」における計画研究 A05「重力波天体の多様な観測に向けた理論的研究」のメンバーのみなさんには多くの参考となる意見を頂きました．ここにお礼を申し上げます．

参考文献

1) http://www.skatelescope.org/
2) http://www.sciops.esa.int/index.php?project=PLANCK&page=Planck_Published_Papers
3) http://www.gw.hep.osaka-cu.ac.jp/gwastro/
4) Abadie, *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010) 173001.
5) E. Berger, *Astrophys. J.* **722** (2010) 1946.
6) B.D. Metzger and E. Berger, *Astrophys. J.* **746** (2012) 48.
7) P. Demorest, *et al.*, *Nature* **467** (2010) 1081; J. Antoniadis, *et al.*, *Science* **340** (2013) 6131.
8) K. Hotokezaka, K. Kyutoku, H. Okawa, M. Shibata and K. Kiuchi, *Phys. Rev. D***83** (2011) 124008.
9) A. De Felice, T. Nakamura and T. Tanaka, arXiv: 1304.3920.
10) N. Cornish, L. Sampson, N. Yunes and F. Pretorius, *Phys. Rev. D***84** (2011) 062003.
11) http://tamago.mtk.nao.ac.jp/decigo/

（たなか・たかひろ，京都大学基礎物理学研究所）

重力（観測）

KAGRA 稼働と重力波の実測に向けて

梶田 隆章・田越 秀行

1. はじめに

1916年アインシュタインは，彼の**一般相対性理論**によれば，もし非常に重い物体が激しく加速度運動をすると，時空のゆがみが波動として真空中を伝搬することを示した．これが**重力波**である．重力波は当初これを予言したアインシュタイン自身も，その大きさがあまりにも小さく，また中性子星やブラックホールなどの巨大質量を持つコンパクトな天体が存在することが全く知られていなかったこともあり，観測ができない純粋に理論的な効果と考えたと伝えられている．しかし，その予言からほぼ100年がたち，技術の飛躍的な発展に支えられて重力波観測を目指したプロジェクトが世界中で進行中である．本稿では，まず，重力波の理論研究の歴史的経緯を少し振り返りながら，理論と実験との関わりを考えていく．その中で，一般相対論のような数学的な物理理論においての実験の重要性について述べたい．その後，日本の重力波観測プロジェクト KAGRA を中心に重力波の実測に向けた現状と，近い将来の重力波天文学の展望を述べたい．

2. 重力波研究の始まり

重力波研究の歴史は決して順風満帆なものではなかったことが知られている．決して短くない期間の間，その存在自体に懐疑的な立場を取る研究者が少なからずいたし，20世紀後半になってからも，重力波放射の最も基本的な公式である，四重極公式への疑念などがくすぶっていた．これらの重力波研究の歴史については，近年刊行されたダニエル・ケネフィックによる『重力波とアインシュタイン』[1]に非常に詳しく記述されている．この本は，詳細な文献調査に基づき，存命中の当事者へのインタビューなども織りまぜながら，アインシュタインを含む著名な科学者たちの「重力の波」との格闘と，最終的に重力波が定説となるまでの歴史をダイナミックに記した労作である．

重力波の放射は，電磁波の放射と対比されて説明されることが多い．電磁気学で習う通り，電磁波の放射では，最低次で通常最も強いのは双極子放射であるが，重力波の放射では双極子放射はなく，**四重極放射**から始まる．1916年にアインシュタインは最初の重力波理論を発表しているが，この論文では議論に誤りがあり，1918年の論文において，より正しい議論により四重極公式は発表されている．

3. 重力波研究の進展と混乱，ウェーバーの実験

このように，一般相対論における重力波の存在は予言されたわけだが，実はこれで理論的予言が完成したわけではなかった．重力波のような波動が一般相対論に存在することは，電磁気学同様，場の理論としてある意味必然的なことであると考えられる．1905年のアインシュタインの特殊相対性理論は，光速よりも速い情報の伝達がないことを示している．そうなると，電磁場や重力場のような場に変動が生じると，その変動の影響が瞬時に無限遠方に伝わることはないため，有限の速度で伝搬する．電磁場ならば電荷，重力ならば質量の変動が振動的であると，その振動が有限の速度で波動として伝搬することになる．しかしながら，このような電磁気学と一般相対論のアナロジーに基づく議論自体に対して，慎重な立場をとる物理学者もいた．また，たとえそのような波動が存在しても，そのような波動が物理的に意味あるものなのか，すなわちエネルギーを運ぶものであるかどうか，放射する系からエ

ネルギーを運び出すかどうかという点はその後長らく研究者たちを悩ませていた．

その後のこの分野の進展は極めて遅く，第二次大戦をはさみ，次の進展は 1960 年代を待つことになる．1960 年代はクェーサーやパルサーの発見により，ブラックホールや中性子星といった天体が注目され，天体物理学の中で初めて一般相対論が本格的に議論された時期であった．その中で，1960 年代の初めから，アメリカのウェーバーが重力波の実験室での検出を目指して，共鳴型アンテナの開発を始めた．そして，1969 年に 2 台の検出器を用いて，発生源は分からないが，統計的には雑音とは言えない信号，すなわち重力波を検出したらしいということを発表したのであった．

実はウェーバーが実験を始めた頃は，重力波の発生源として有力なものはほとんど考えられていなかった．パルサー（すなわち中性子星）の発見も 1967 年であった．つまり波源についての確証なしに検出器を開発していたことになり，ウェーバーの実験がいかに時代を先取りしていたかが分かる．ウェーバーの実験の後，実際に多くの追試が行われたが，それらはすべてウェーバーの結論を否定するものであった．今日ではウェーバーの実験は，実験の結果自体よりも，その後の重力波検出装置開発のきっかけを与えたという意味で評価されていると言える．

4. 四重極公式論争

重力波が，それを放射する系からエネルギーを運ぶかという問題は，1960 年代後半には理論的にはほぼ収束したといえるが[2)]，連星系から放出される重力波の問題は，1970 年代には四重極公式論争に発展していった．このときの主な争点は，四重極公式の様々な導出法の数学的妥当性の問題であった．そんな中，1974 年にアメリカのハルスとテイラー[3)]により，連星パルサー PSR1913+16 が発見された．これは**連星中性子星**であると考えられる連星系である．そして，1978 年に，テイラーらは，連星パルサーの軌道収縮の観測結果が，四重極公式による結果と一致することを発表した．長年に渡り純粋に理論的な産物であり，論争の種であった重力波の四重極公式は，突然実験的検証に晒されることとなり，そして，最も標準的と考えられる表式がその実験的検証に合格したのである．重力波は確かに連星系からエネルギーを運び出していることがこれで観測的には確定したものと言って良いであろう．理論的にも，その後四重極公式導出方法の妥当性や中性子星のような強い重力場を持つ場合の妥当性について，納得のいく議論が展開され，四重極公式論争は 1980 年代初めに終結した．

重力波研究における以上のような論争，混乱の原因は，関与する研究者コミュニティーの小ささと，実験の欠如にあると考えられる．混乱の中でも，一般相対論の基礎に関して重要な結果がいくつも導き出されており，混乱が全く無意味であったとも言い切れないが，連星パルサーの観測で，現実を説明する必要性に迫られて，重力波研究は混乱から抜け出し，通常の物理学の研究へと進化していったように感じられる．ハルスとテイラーは「PSR1913+16 の発見により，重力研究の新しい可能性を開いた」という業績によってノーベル物理学賞を 1993 年に受賞したが，このノーベル賞受賞理由は，以上のような歴史的経緯を見事に表している文章であると言えよう．

5. 重力波の直接観測への道のり

1990 年代より世界中で**レーザー干渉計**によって重力波観測を目指す複数の大型プロジェクトが始まった．レーザー干渉計では，図 1 に示すような原理で，レーザーの光をビームスプリッターで透過光と反射光に分け，その先 2 つの光路上にこの光を反射させるミラーを設置し，2 つに分けられた光を共にビームスプリッターに戻す．するとそこで 2 つの方向から戻ってきた光が干渉する．干渉光の強度は光路長の差が 1 波長分変わるたびに明暗を繰り返す．従って，この干渉計に重力波が到来して干渉計の 2 辺の長さの差に変化が起

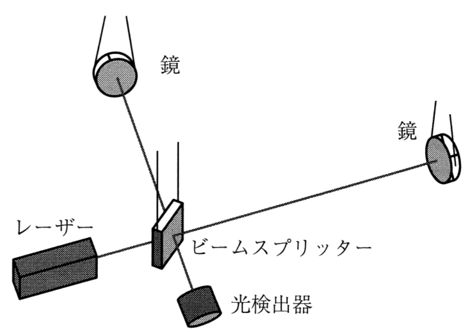


図 1　レーザー干渉計の原理．レーザー干渉計に重力波が到来して干渉計の 2 辺の長さの差が時間的に変化すると，干渉光の強度の時間変化として記録される．なお実際の重力波測定器では重力波に対する感度を最大にするために様々な工夫が加えられる．

こったとすると，それは干渉光の強度変化として観測できるはずである．また重力波によって干渉計の2辺の長さの差が時間的に変化するなら，それは干渉光の強度の時間変化として観測される．

日本でも1995年には三鷹の国立天文台の敷地内に**TAMA300**と呼ばれる一辺300mのレーザー干渉計の設置を開始した．この装置は2000年代初めには我々の銀河系内で連星中性子星の合体が観測できるような世界最高感度に到達し，長期観測を行った[4]．しかしながら重力波の観測にはいたらなかった．ちなみに我々の銀河系内での連星中性子星の合体の予想頻度は1万年に1度程度と予想されている．

また，TAMA300は東京近郊の地表に設置されたため，地面振動の影響を強く受けていた．この経験をもとに，レーザー干渉計全体を人の活動が少ない地域の地下に設置することと，最終的に感度を制限すると考えられたレーザー干渉計で使われる鏡の熱雑音を落とすために鏡を極低温に冷却することが提案された．この提案の有効性を実証するために2003年にスーパーカミオカンデがある岐阜県飛騨市神岡の地下に基線長100mのレーザー干渉計**CLIO**が設置された．当初は様々な困難があったものの，2009年には鏡やそれを懸架するシステムからの熱雑音とレーザー光の統計的ふらつき（ショットノイズ）という原理的な物理で制限される感度を達成し，翌2010年春には低温にすることで感度が向上することを世界で初めて実証した[5]．このような地道な開発研究を経て，2010年夏に大型低温重力波望遠鏡プロジェクト（**KAGRA**）の建設が開始された．

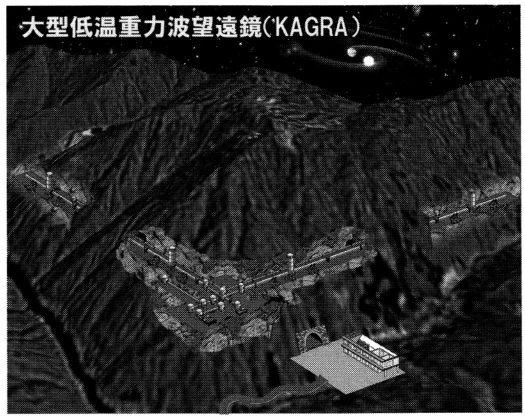


図2 KAGRAの完成予想図．一辺3kmの超高性能レーザー干渉計を岐阜県飛騨市神岡町の地下に設置して，重力波の観測を目指す．完成は2017年頃と見込まれている（東京大学宇宙線研究所提供）．

6. KAGRAプロジェクト

KAGRAは重力波を確実に観測し，それをもとに新たな天文学を創成することを目的としている．図2にKAGRAの完成予想図を示す．先にも述べたが，銀河系内で知られている連星中性子星の数と，その合体までの予想時間から平均的に我々の銀河系内で連星中性子星の合体はおおよそ1万年に1度の頻度であると見積もられている．連星中性子星の合体は比較的よく理解されているため，KAGRAは連星中性子星の合体時に放出される重力波の観測に最適化された設計になっている．従って1年間に10回程度の観測をしようと思うなら，常時10万個の銀河が観測できるような感度を持つ装置が必要である．重力波の測定器にはある程度指向性があるので，それを考慮すると，装置として最も感度がよい方向については約7億光年先までが見渡せる必要があり，これがKAGRAの感度としての要求値である．

7億光年先の連星中性子星合体の重力波信号を捕らえようとすると予想空間変位は$10^{-23}\,\mathrm{Hz}^{-1/2}$と非常に小さいものであり，KAGRAの装置はこの要求感度を達成できるように設計されている．まずレーザー干渉計の光路長は直接感度に比例するので，光路長は候補地の山の形状などで決まる最大限として3kmとなった．もし3kmの光路上に空気があると気体分子による光の揺らぎが干渉光に影響を与えるのでレーザー光の光路は真空パイプや真空容器で保護され10^{-7} Paの高真空に保たれる．さらに3kmの光路の両端ではレーザー光を約1000回以上も反射させて光共振器（**ファブリ・ペロー共振器**）を構成し，実効的な光路長を伸ばして重力波に対する感度を上げる．またレーザー光の光子数のふらつきが高周波数領域では感度を制限するので本プロジェクトでは200W級の高出力DCレーザーを使用する予定である．

また，上記の要求感度を達成するには，地面振動の影響が問題にならないような装置とせねばならない．干渉計全体を地下200m以深に設置することで10から100Hzの帯域では地面振動を地表と比較して2桁以上抑えられる．しかし重力波を捕らえるにはさらに高度の防振技術で装置の光学系全体を防振する必要がある．このように地下に設置してさらに防振することで，KAGRAでは重力波の周波数で10Hz以上では地

面振動の影響は問題にならないと予想されている．

十分な防振をすると，10 Hz 以上の周波数帯では何が装置の感度を制限するのであろうか？ まず，3 km のファブリ・ペロー共振器を構成している 2 枚の向かい合う鏡の熱運動が感度を制限する．つまり，鏡中の分子が熱運動しているため 2 枚の鏡の間の距離は揺らいでおり，これが問題になる．そのため KAGRA ではレーザー干渉計の直交する光路上でファブリ・ペロー共振器を構成する 2 組の 2 枚の鏡，合計 4 枚の鏡を 20 K という極低温に冷却することで，熱雑音が干渉計の感度を制限することがなくなるよう設計されている．その結果，設計通りの装置が実現すれば干渉計の感度は 10 から 1000 Hz の最も感度がよい周波数領域でレーザー光が鏡を揺らす効果と，レーザー光の光子数の統計的ふらつきで決まる感度になると予想される．KAGRA の予想感度曲線を図 3 に示す．また 6.5 億光年（200 Mpc）先からの重力波信号の様子も示した．これだけ距離が離れるとほぼ検出器の感度の限界に近いが，重力波の信号が 100 Hz 付近になったところでノイズの上に信号が観測されることが期待される．

上記のような基本仕様の装置を製作することも大変なことであるが，これを安定に動かすことも並大抵のことではない．例えば干渉計全体では主な鏡だけでも 20 枚程度あり，これらの位置や角度を非常に精度よく設計通りに常時コントロールすることが求められ，その結果位置や方向を常時補正して装置全体を安定稼働させることが求められる．そのため，この制御には多数のセンサー群とそれをデジタル制御する大規模計算機システムが必要になる．

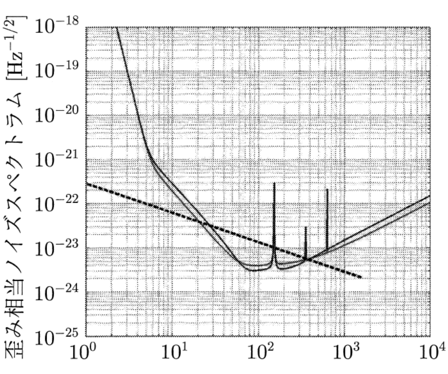


図 3 KAGRA の感度を制限するノイズレベルの周波数依存性．連星中性子星の合体が 6.5 億光年（200 Mpc）先で起こったときに予想される信号の特徴的振幅を図中に点線で示した．信号は最初低周波であるが，相互に近づくにつれて周波数が高くなり，100 Hz 前後で装置のノイズレベルを超えて信号が観測されると予想される．なお，図中に 2 本の実線があるが，これは干渉計の動作パラメータの取り方を変えたときの予想感度を示している．また図中にあるスパイク状のピークは鏡を吊してあることに起因する共振周波数であり共振周波数では感度が悪くなる．

以上述べてきたように重力波を観測する装置は様々なところで非常に高度な技術が要求される．そのため KAGRA プロジェクトでは，まず最も単純なレーザー干渉計の運転をして経験を積み，また問題点を修正し，より高度な干渉計への更新と運転ということを繰り返して，最後に鏡を極低温にして当初の設計感度に到達することを計画している．2014 年春には地下空洞の掘削が完了し，2015 年の暮れには干渉計として最初の運転を行い，そして 2017 年には鏡を低温に冷やした状態で観測を開始したいと考えている．

7. 重力波理論へのインパクト—最後の 3 分間

前節までに論じたような KAGRA をはじめとするレーザー干渉計重力波検出器で設計通りの感度が達成されれば，連星中性子星系合体に伴う重力波は 200 Mpc 程度まで信号雑音比（S/N 比）が 8 程度で観測可能である．図 4 に連星中性子星合体時に予想される重力波の波形を示す．さて，この節の表題の最後の 3 分間（The Last Three Minutes）とはコンパクト連星系がレーザー干渉計の感度帯域の振動数の重力波を放出し

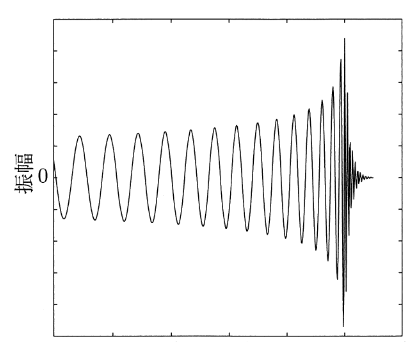


図 4 連星中性子星合体時に予想される重力波の波形の時間変化のモデル．縦軸は任意スケール．図中時刻 ＝ 0 で合体が起こっているとしている．合体によってブラックホールが生成され，生成直後のブラックホールの準固有振動が短時間予想される．

ながら軌道半径を縮め，合体するまでの数分間のことを指している．この言葉を初めて用いたのはカリフォルニア工科大学（カルテク）の理論グループで，1993年に発表した論文[6]の表題となっているが，この言葉がワインバーグの有名な宇宙論の啓蒙書である『The First Three Minutes』（邦題『宇宙創成はじめの3分間』[7]）を意識して作られた言葉であることは容易に想像できる[8]．

連星中性子星合体重力波は，KAGRAの観測帯域では，実際には3分間ではなく約1000秒間観測されるが，$S/N = 8$というのはこの1000秒間に渡りデータと予言される波形の相関を取って初めて得られる値である．この1000秒間の間に重力波は約16000サイクル振動するが，その重力波の位相を正確に再現する予想波形があって初めて$S/N = 8$が実現される．理想的には重力波のサイクルのずれが1サイクル以下となるくらいに正確な波形があることが望まれる．このことが，重力波の理論研究の新たな推進力となった．

先に述べたカルテクグループの1993年の最後の3分間論文[6]は，コンパクト連星系を検出し，物理的情報を波形から引き出すために必要な正確な理論波形の計算の重要性を主張した問題提起の論文である．重力波の四重極公式は，星の速度が光速に比べてあまり速くなく，従って，2つの星が互いに及ぼす重力場もあまり強くない，ニュートン力学的状況を想定して得られるものであり，基本的には星の速度をv，光速をcとすると，(v/c)を微小パラメータとしてアインシュタイン方程式を近似して得られるものである．その重力波波形をより高精度に計算するには，(v/c)による展開を高次まで行っていくことが必要であるが，これを**ポストニュートニアン（PN）近似**という．便宜的に最低次より$(v/c)^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$まで求める近似を$n/2$次のポストニュートニアン近似と言う．文献6)では，PN近似の収束性があまり早くなく，たとえ2.5次まで取り入れたとしてもエネルギー放出率が収束していないことが分かった．これは，連星系が合体直前お互いに接近してくると速度vが光速cに比べてあまり小さいとは言えなくなり，(v/c)展開の収束性が悪くなるためである．この論文当時PN近似で完全にできていたのは1次のオーダーまでであったので，この結論は，PN近似による計算が絶望的にも思えるものであった．実際この論文では，PN近似に変わる新たな近似方法が必要であるとして，いくつかの別の近似方法について議論をしている．

この論文の悲観的な予測とは裏腹に，この問題提起がきっかけとなり，PN近似の計算はこの後大いに進展することとなった．ブラックホール摂動論を用いてPN近似の高次の展開係数の一部を求める計算は，上記論文[6]のすぐ後にこの文章の著者の一人（田越）を含む京都グループによって4次のオーダーまで行われた．その結果，3.5次まで計算すると，レーザー干渉計の観測帯域内での波のサイクル数のずれが1以下に収束しそうであるということが判明した．PN近似はそんなに悪くないということが分かったのである．その後，2004年頃までには，Blanchet, Jaranowski, Schafer, Damourらによって，連星の運動に関しては最低次から3.5次のオーダーまで，遠方に放出される重力波のエネルギー流束についても，四重極公式から数えて3.5次のオーダーまで計算された．日本の伊藤洋介，二間瀬敏史，浅田秀樹も連星の運動方程式を独自の方法で導いて貢献している．

注目すべきは，これらの高次計算はすべてレーザー干渉計による重力波観測のためのデータ解析に必要とされ行われてきている点である．もし大型レーザー干渉計建設の計画もなく，高次のPN近似の計算の重要性が認識されなければ，この計算の進展は相当遅れていたことであろう．さらに重要な点は，これらの計算された表式は近い将来に実験的な検証に晒されることになるということである．現状では複数のグループによって行われた3.5次のPN近似の運動方程式の結果はすべて一致しており，理論的な争点はない．それでも，これらを検証することは理論計算の検証になるだけでなく，重力理論の検証にもなる．重力理論の検証については，今号田中貴浩氏の記事でも触れられているので，参照願いたい．

8. 重力波天文学の展望

重力波の直接観測は，一般相対論や重力理論の検証だけでなく，天文学的にも非常に重要であると考えられる．連星パルサーの観測で，連星系から重力波の四重極放射によってエネルギーが放射されていることは確認されたが，発生した重力波がどのように宇宙を伝搬しているかについての実験的検証はまだなく，これは重力波の直接観測によって可能になる．コンパクト連星系の合体後は最終的にはブラックホールが形成されると考えられるが，その際に放出される重力波は，ブラックホール特有の減衰振動を示すと考えられてい

る．それを観測できれば，ブラックホールの存在の直接的検証を与えることができ，その検証自体が一般相対論の検証にもなる．連星中性子星合体については，合体過程あるいは合体後にできる物体の詳細な解析を重力波で行うことで，中性子星の高密度物質状態についての知見が得られることが期待されている．

ガンマ線バーストという天文現象がガンマ線により観測されているが，そのうち持続時間が短いショートガンマ線バーストについては，母天体が不明のままである．これは連星中性子星，あるいはブラックホール中性子星連星の合体によるものではないかと言われている．3 台以上のレーザー干渉計により，連星合体重力波の発生源の方向は 10 から数 10 平方度の精度で分かるため，重力波とガンマ線バーストの発生時刻と方向が一致していることが分かれば，決定的な証拠となると期待されている．重力崩壊型超新星爆発は爆発メカニズムが十分解明されていないが，従来からの天文観測に加えて，爆発の中心部分の観測が可能な，スーパーカミオカンデによるニュートリノ観測とレーザー干渉計による重力波の観測をあわせることにより，爆発メカニズム解明に迫ることが期待される．以上の他に，将来的には重力波検出の技術を発展させることで，宇宙開闢のビッグバンのときの情報を重力波で得られるようになるかもしれない．

9. まとめ

重力波という基礎物理学，天文学，宇宙論に大きなブレイクスルーをもたらす可能性を秘めた研究分野は，長年の基礎研究を経て今まさに本格的な観測研究の段階に移ろうとしている．アインシュタインの重力波理論の論文以降，長年に渡り実験とは無関係に研究が進められてきた重力波研究は，本格的に観測を目指す巨大プロジェクトの時代となった．

重力波観測のデータ解析での必要性から，理論が大いに進展してきた．連星中性子星や連星ブラックホール合体の最終段階は本稿ではほとんど触れなかったが，一般相対論やその他の物理過程を入れた精密な数値シミュレーションで得られるものであり，重力波の観測が一つの大きな動機になっている．重力波を使って宇宙を観測するという現在の段階においては，理論と実験の更なる結び付きが必要になることは言うまでもない．重力波の世界初観測は 2010 年代後半とすぐそこに来ていると思われるが，我々としては KAGRA で世界初観測ができるように努力していきたい．そして，それにも増してその後の重力波天文学の開拓の時代にあって，日本が欧米と並んでこの研究分野を牽引していくことができるように努力を続けていきたいと考えている．

日本の重力波の関連研究者の長年の夢であった KAGRA の建設が現実のプロジェクトとして進んでいることは誠に喜ばしく，本プロジェクト実現に向けてご支援をいただいた関係者の皆様にこの場を借りて厚く御礼申し上げたい．

参考文献

1) ダニエル・ケネフィック著，松浦俊輔訳『重力波とアインシュタイン』(青土社，2008)．(著者のケネフィックは重力波の理論をこの分野の大家であるキップ・ソーンのもとで学んだ重力波理論の研究者でもあり，物理的な内容の記述も正確である．)
2) 例えば次などが重要な論文である．R. Isaacson, *Phys. Rev.* **166**, 1272 (1968).
3) R.A. Hulse and J.H. Taylor, *Astrophys. J.* **195**, L51 (1975).
4) M. Ando *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3950 (2001).
5) T. Uchiyama *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 141101 (2012).
6) C. Cutler *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 2984 (1993).
7) 現在入手可能な日本語版は，S. ワインバーグ『宇宙創成はじめの 3 分間』(筑摩書房，2008)．
8) 同様のタイトルの次の本も参考になる．中村卓史，『最後の 3 分間—重力波がとらえる星の運命』(岩波書店，1997)．

(かじた・たかあき，東京大学宇宙線研究所)
(たごし・ひでゆき，大阪大学大学院理学研究科)

超弦理論と実験
ホログラフィー理論と重イオン実験

夏梅 誠

1. 予期せぬ結びつき

理論と実験の結びつきと言うと，通常，理論的予言はどのような実験で検証できるかを念頭に置くだろう．逆に，実験はどのような理論を検証するのか念頭に置くことが多いだろう．しかし，ここで紹介する話は，そのような物語ではない．理論的研究が当初全く想定していなかった実験に応用され，また実験も当初全く想定していなかった理論の検証に使われた，という事例である．物理の歴史をひもとけば，過去にこういった事例がなかったわけではないが，それでも興味深い事例だと思うので，ここで紹介したい．

問題となる実験は，**クォーク・グルーオン・プラズマ**と呼ばれるものに対する実験である．一方の理論は，**超弦理論**と呼ばれる．自然界には，重力，電磁気力，弱い力，強い力，という 4 つの基本的な相互作用がある．超弦理論は，これらの力を統一的にあらわす統一理論の最有力候補である．その統一理論が，クォーク・グルーオン・プラズマ実験と何の関わりがあるのだろう？ ここでは，その関係がどうはじまり，どのように発展し成熟していったのか，ここ 10 年ほどの歴史をふり返って説明することにする．

なお，大方の物理の物語と同様，ここで書く物語が正確な歴史を述べていると言うつもりはない．むしろ，私が把握している範囲での歴史，私個人が関わった物語だということを断っておく．

2. クォーク・グルーオン・プラズマ（原子核物理）

陽子や中性子は基本的な素粒子ではなく，より基本的な粒子，**クォークやグルーオン**からできている．ただし，通常の状況下では，クォークやグルーオンは陽子や中性子の中に「閉じこめ」られており，ばらばらにとり出すことはできない．しかし，十分な高温では，クォークやグルーオンは閉じこめから解放され，クォーク・グルーオン・プラズマをなす．クォーク・グルーオン・プラズマへの転移は，2 兆度程度と見積もられている．

クォーク・グルーオン・プラズマの存在は，理論的には以前から予言されていた．しかし，このプラズマは実験でも創り出されたことがなかったものであり，ましてやその物理的性質など測られたことはなかった．しかし，近年このプラズマを創成して物理的性質を測ろうという**重イオン実験**がおこなわれている．代表的なものとして知られているのが，

- ブルックヘブン国立研究所の RHIC（リック），
- セルンの LHC

と呼ばれる加速器を使った実験である．

重イオン実験でまず問題になったことが，実験結果をどう理論的に解釈すべきか，という点であった．クォークやグルーオンは，理論的には**ゲージ理論**の一種，**量子色力学（QCD）**によって記述される．しかし，クォーク・グルーオン・プラズマは強く相互作用する多体系であり，そのような状況下で QCD を解くのは困難を極めることが知られていた．

このような状況下で，原子核研究者が注目したのは，クォーク・グルーオン・プラズマが高温の多体系だという点である．このような系を扱うのに，QCD のような微視的理論を完全に解く必要はない．このような系は熱力学によって記述され，温度 T，エネルギー密度 ε，圧力 P，といった熱力学量を指定することで，巨視的な性質は一意的に定まる．熱力学は平衡系を扱うが，平衡から外れた場合は，**流体力学**によって記述さ

れる．したがって，実験ではクォーク・グルーオン・プラズマの熱力学的・流体力学的性質に着目すればよい．

もっとも，熱力学・流体力学を使っても，完全に理論的問題が解決できたわけではないことに注意しておきたい．実験と理論的予言を比べるために，あいかわらず微視的理論を解く必要はある．

熱力学の場合，状態方程式は理論的に定める必要がある．例えば，光子気体では状態方程式は $\varepsilon = 3P$ で与えられる．また，流体力学の場合，**輸送係数**を理論的に定める必要がある．輸送係数の例としては，**粘性**，音速，熱伝導度などがあり，いずれも「ある物理的影響が伝搬する目安」を与える．これら関係式や係数自体は，熱力学・流体力学の枠内だけでは決まらず，微視的理論を解く必要がある．別の言葉で言えば，熱力学・流体力学は，微視的理論が解くべき箇所はこれら特定の式，係数だけで良いことを保証してくれる．熱力学・流体力学は，微視的理論から取り出すべき情報を絞り込んでくれるのである．しかし，クォーク・グルーオン・プラズマに対して輸送係数を計算するのは，相互作用が弱いときには可能だが，相互作用が強いときには難しい．

この問題を解く手段は，予期せぬ方向からもたらされた．RHIC の完成が近づいた頃，超弦理論の分野で，ある活発な研究がなされていた．

3. ホログラフィー理論（超弦理論）

1997 年，当時まだ 30 歳に満たない研究者，マルダセナによって**ホログラフィー理論**という考えが提唱された*1)．この考えは，超弦理論を使って導かれた考えなのだが，大雑把に言って，強結合のゲージ理論とある種の重力理論が等価だと主張する．ただし，この 2 つの理論は，違う時空次元に住む．前者は，QCD と同様のゲージ理論で，我々の住む 4 次元時空の理論である．しかし，後者は，仮想的な 5 次元時空の重力理論である．2 つの理論の住む時空次元が違うというのが，ホログラフィー理論という名前の由来である．通常のホログラムが 2 次元面に 3 次元の映像を記録しているように，ホログラフィー理論では，4 次元時空の理論が 5 次元時空の理論を記録しているのである．

この考えがどのように統一理論たる超弦理論から生まれたのか，詳しい説明は他の解説[1)]や教科書[2)]に譲ることにするが，一点だけコメントしておく．ホログラフィー理論では，ゲージ理論と重力理論，という 2 つの理論が登場する．この 2 つを同じ土俵で扱えること自体，統一理論だからこそ可能になったことである．これまでの素粒子論では，この 2 つの理論は理論的基礎や概念が大きく異なる．したがって，通常の素粒子論では，このような関係は望むべくもない．ホログラフィー理論は，超弦理論だからこそ可能なのである．

クォーク・グルーオン・プラズマのように高温のゲージ理論の場合，ホログラフィー理論は

（高温の強結合プラズマ）=（ブラックホール）

を主張する．**ブラックホール**が出てくる基本的な理由は，ブラックホールも熱力学系だからである．**ホーキング放射**という現象により，ブラックホールも温度という概念を持つ．

先にみたように，平衡状態にある熱力学系が（摂動を加えたりして）平衡状態から少し外れると，流体力学であらわされる．ブラックホールも 1 つの熱力学系なので，ブラックホールの振舞いも流体力学であらわされるだろう．

事実，ブラックホールの振舞いは流体と似ている（図 1）．例えば，池にボールを落とすと，さざ波が立つが，さざ波はやがて止んでもとの静かな水面に戻る．これを散逸と言うが，流体力学によると，これは粘性の効果である．同様に，ブラックホールにモノを落としたとすると，しばらくの間，ブラックホールの形は不規則になるが，最終的にはもとの対称的なブラックホールに戻ってしまう．この場合の「散逸」は，摂動がブラックホールに吸収されることで起こる．したがって，ブラックホールに対しても何か粘性のような概念が考えられるはずである．

さて，原子核の研究者は，クォーク・グルーオン・

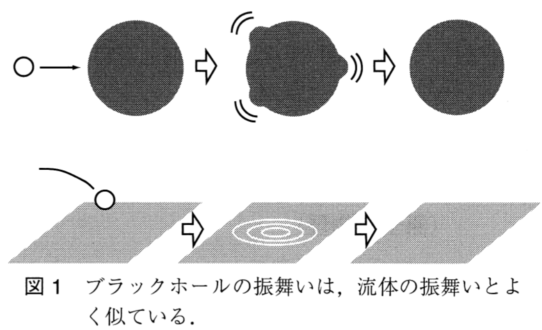


図 1　ブラックホールの振舞いは，流体の振舞いとよく似ている．

*1)　ホログラフィー理論は，「AdS/CFT 双対性」，「ゲージ・重力双対性」など様々な呼ばれ方をするが，いずれも同じものを指す．

プラズマの粘性を理論的にどう計算するかに頭を悩ませていた．しかし，ホログラフィー理論を使えば，ブラックホールの計算からクォーク・グルーオン・プラズマの粘性が計算できるかもしれないのである．

2001 年，ホログラフィー理論を使って，強結合ゲージ理論プラズマの粘性が初めて計算された[3]．その結果は，

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_{\mathrm{B}}} \tag{1}$$

(η：ずり粘性率，s：エントロピー密度，$\hbar$：プランク定数，k_{B}：ボルツマン定数)．数値的には，

$$\frac{\eta}{s} \approx 6.1 \times 10^{-13}\ \mathrm{K \cdot s}. \tag{2}$$

数値だけ挙げても，この η/s の値がどの程度の大きさなのか，イメージするのは難しいが，この値は，通常の物質と比べて著しく小さい．一例として，常温・大気圧下で窒素の η/s はこの値の 3×10^3 倍にもなる[*2]．ホログラフィー理論によると，強結合ゲージ理論プラズマの粘性は小さく，粘性ゼロの**完全流体**に近いのである．

「ゲージ理論プラズマは著しく小さい粘性をもつ」[*3]，というこの結果は興味深いものの，この時点では大きな注目を集めるには至らなかった．第一に，ホログラフィー理論の結果は，**$\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論**と呼ばれる仮想的な理論のプラズマに対するものであり，クォーク・グルーオン・プラズマに対するものではなかったからである．第二に，重イオン実験は当時まだ始まったばかりで，クォーク・グルーオン・プラズマの粘性の実験結果についてもわかっていなかったからである．

4. RHIC の発表（原子核物理）

状況が一変したのは，2005 年である．この年の 4 月，フロリダ州タンパでおこなわれたアメリカ物理学会の年会で，RHIC の最初のまとまった実験結果が報告された[4]．プレスリリースも出され，マスコミでも大きな話題になった[5]．発表によると，RHIC で創成されたクォーク・グルーオン・プラズマは完全流体に近いことが明らかになった．

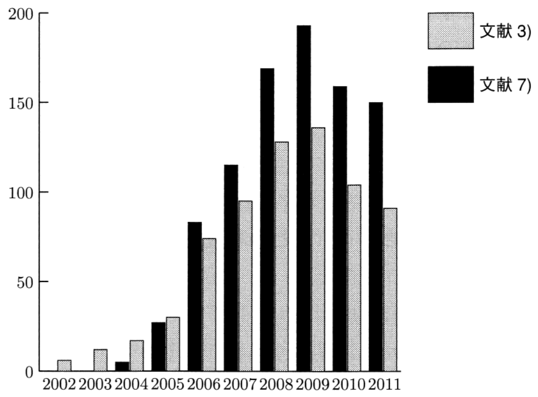


図 2　ホログラフィー理論の応用研究でカギとなる 2 つの論文の年ごとの引用数．

しかし，このプレスリリースには，一風変わったコメントも載っていた．「超弦理論と RHIC 実験の間の予期せぬ結びつきには心が躍る」．ここで言う超弦理論との結びつきとは，ホログラフィー理論で得られた小さな粘性のことを指す．大型実験のプレスリリースで超弦理論が言及されたのは，おそらくこれが史上初めてだったと思われる[*4]．

超弦理論の関係者も，この発表に注目した．それまでホログラフィー理論の研究は純粋に理論的なものが主流で，実際の実験と結果を比較するという研究はほとんどおこなわれていなかった．そもそも，超弦理論というと，統一理論という壮大なテーマを扱うものの，実験的証拠がない，としばしば批判されてきた．しかし RHIC の発表は，こういった状況を変えるだけのインパクトをもっていたのだ．

2005 年を境に状況が一変したことは，論文の引用数からもわかる．図 2 は，ホログラフィー理論の応用研究でカギとなる 2 つの論文の年ごとの引用数を調べたものである[6]．このグラフを見ると，2005 年を境として引用数が急激に伸びたことがわかる．

5. 普遍性の検証（超弦理論）

ホログラフィー理論による粘性の計算は，もともと

---

*2）η/s という組合せには，物理的意味がある．エントロピーは系の自由度の目安なので，η/s は単位自由度あたりのずり粘性に相当する．通常の流体力学の用語では，$\eta/(Ts)$ は動粘性係数と呼ばれる．

*3）以下では繰り返し「粘性が小さい」という言い方をするが，η 自体が小さいという意味ではなく，正確には η/s が小さいという意味である．

*4）超弦理論との関係をプレスリリースに含めるよう進言したのは，RHIC のフェニックス・グループで当時スポークス・パーソンを努めていたビル・ザイツ（Bill Zajc）だと言う（本人談）．超弦理論と重イオン実験の結びつきを語る上で，彼の果たした役割は大きいと言えよう．

は $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論に対するものだった．これはQCDとは違う理論である．だからこそ，クォーク・グルーオン・プラズマの実験結果と近いことが，RHICの公式発表で「予期せぬ結びつき」と表現されたのであろう．したがって，ホログラフィー理論とクォーク・グルーオン・プラズマを比較する上で，「ホログラフィー理論の結果 (1) がどの程度普遍的なのか」という問題が挙がってきた．

もっとも，当時すでにホログラフィー理論を使って，様々な超対称ゲージ理論で粘性の計算がされ，その結果はいつも式 (1) となった[7]．しかし，普遍性の検証は，まだまだ十分ではなかった．

2006年初頭，式 (1) は有限密度の場合でも成立することが確認された[8]．これは我々のグループを含む4つのグループによって同時に確認された．この例が重要だったのは，もともと有限密度では普遍性が成り立たないと予想されていたのに，普遍性の成立を示したからである．これが契機となって，あらためて普遍性の研究が精力的におこなわれた．そして，既知の例では，常に式 (1) が強結合極限で成立することが知られている．

したがって，η/s の値は，強結合ゲージ理論に共通した性質ではないかと考えられる．そうであれば，クォーク・グルーオン・プラズマに対しても，式 (1) は良い近似になっているのではないかと想像される[*5]．

6. 数値シミュレーションの問題（原子核物理）

ホログラフィー理論の結果は，クォーク・グルーオン・プラズマに対しても良い近似だと理論的には考えられるようになってきたが，一方実験結果はどの程度ホログラフィー理論の結果に近いのだろう？

実験結果のもともとの解析は完全流体に対するものであり，粘性の見積もり自体は大雑把なものしかなかった[9]．当時，格子数値計算の手法を使って，強結合ゲージ理論プラズマがホログラフィー理論の予言に近い η/s をもつらしいことがわかってきていた[10]．しかし，実際の実験でみえているものが，小さな粘性の効果かどうか確かめるのは，また別問題である．実際の実験で，直接クォーク・グルーオン・プラズマの粘性を測っているわけではないからである．

重イオン実験では，金原子核のような重い原子核どうしを衝突させる．その結果生成される莫大な粒子は，十分高温であればクォーク・グルーオン・プラズマをなす．しかし，このプラズマは膨張し，冷えていく．最終的には，クォーク・グルーオン・プラズマは再び**ハドロン**と総称される粒子に閉じこめられる．観測されるのは，これら多数のハドロンである．

クォーク・グルーオン・プラズマの複雑な時間発展を理論的に追跡するには，流体の数値シミュレーションをおこなう．これは，まず流体としての初期条件を与え[*6]，流体の発展を数値的に追うという手法である．その際に，粘性の値をいろいろと変えて，実験結果に近い粘性の値を決める．この結果が，ホログラフィー理論の予言に近いかどうかをみればよい．

当時，すでに完全流体のシミュレーションはされつつあり，シミュレーション結果が実験結果とよくあうことはわかっていた[11]．そのことを受けて，RHICの公式発表で「クォーク・グルーオン・プラズマは完全流体に近い」と表現された．しかし，小さな粘性を取り入れたシミュレーションはできていなかった．原理的な問題があったためである．

実は，相対論的粘性流体力学には，物理的ではない不安定性が存在する．この不安定性は，相対論的粘性流体力学に特有のものであり，不安定性が起こる時間スケールは極めて短い．シミュレーションの立場では，この不安定性は，粘性を導入した途端にシミュレーションが破綻することを意味する．相対論的粘性流体のシミュレーションは存在しないのである．だから，実験結果の解析は，粘性の大雑把な見積もりにとどまっていたのである．

7. 二次流体力学（超弦理論）

実験結果がどの程度ホログラフィー理論の予言に近いか知る上で，相対論的粘性流体力学の非物理的な不安定性が壁となっていた．しかし，この不安定性を除く方法は，すでに知られていた．流体力学の近似の「精度」を上げるという方法である．

先に述べたように，流体力学は系の巨視的な振舞いを記述する理論であり，低エネルギー長波長近似の理論である．この近似の下での0次が完全流体であり，1次が粘性流体である．しかし，近似の次数を2次まで上げると，非物理的な不安定性は起こらないことが

*5) 現在のところ，直接QCDに対してホログラフィー理論の計算をおこなうことは，様々な技術的困難からできない．

*6) これはQCDなどの知識を使って与えるが，これを理論的に決めるのも難しい問題である．

知られていた．次数を2次まで上げた理論は，しばしば「二次流体力学」と呼ばれる．

しかし，流体近似の高次へと進むことは，理論にパラメータ（輸送係数）が増えることを意味する．これは，粘性流体で粘性というパラメータが増えたのと同じ事情である．実験結果と比較する上で，二次流体力学で増えたパラメータも決める必要がある．しかし，粘性と同様，微視的理論からこれらを決めるのは，困難である．

となると，粘性と同様，これらのパラメータをホログラフィー理論から決めればいいのではないか？ このような考えに基づいて，2007年のクリスマス直前に計算結果が発表された[12]．またしても，我々のグループを含む3つのグループによって同時に発表されたものである．この結果は，ただちにクォーク・グルーオン・プラズマのシミュレーションに応用された[13]．その結果，ホログラフィー理論の予言 (1) が，さらに精度良く検証されることにつながったのである．

8. その後の展開

このへんで我々の物語は終えることにしよう．しかし，この物語と並行して，あるいはこの物語の後にも超弦理論と実験の関係は続いている：

1. 今回取りあげたのは，クォーク・グルーオン・プラズマの流体力学的性質だったが，原子核物理では他にもクォーク・グルーオン・プラズマに特徴的な現象が議論されてきた．ホログラフィー理論で，それらの現象を解析する研究も盛んにおこなわれている[14]．また，重イオン実験はLHCでもおこなわれているため，その結果も注目されている．

2. また，今回取りあげたのは，QCDの非閉じこめ相の性質だったが，QCDの閉じこめ相についても議論されている．特に，酒井–杉本模型と呼ばれるモデルから求めたハドロンの性質は，驚くほどの精度で実験結果と一致する[15]．本特集監修の橋本幸士氏も，この方面の研究で名高い．

3. ホログラフィー理論は，物性にも応用されてきている．特に発見から四半世紀経つものの，いまだに理論的な理解が十分でない高温超伝導が注目されている．QCDのようなゲージ理論は，通常の物性理論では現れないということで，ホログラフィー理論の物性への応用には当初批判も多かったが，徐々に市民権を得つつある（少なくとも超弦理論の分野では）．これまでの主な成果として，

- ホログラフィー理論でも超伝導が記述できることがわかっている[16]．
- 金属はフェルミ流体論で記述されるが，高温超伝導体は非フェルミ流体として振る舞うことが知られている．ホログラフィー理論で，ある種の非フェルミ流体を記述することが可能になった[17]．

9. まとめ

超弦理論とRHICは，理論と実験のフィードバックが非常にうまくいった事例だと思う．当初はそれぞれ独立に始まった理論と実験が，RHICの発表によって関わりをもつようになり，たがいに刺激しあうことで理論・実験の結果がより精密になっていった様をみてきた（図3）．

超弦理論による粘性の最初の結果は，特定の理論に対するものだったが，クォーク・グルーオン・プラズマはほぼ完全流体というRHICの発見と近かった．それに刺激されて超弦理論の研究が進み，強結合プラズマでの粘性の普遍性が理論的に確立した．そうなると，クォーク・グルーオン・プラズマの粘性は本当に超弦理論の予言通りなのか検証しよう，という機運が出てきた．このため，流体シミュレーションの研究が進んだが，二次流体力学も扱う必要が出てきて，またその際に新たに現れる輸送係数をどう決めるのか，が問題になった．そこで，超弦理論でそれらのパラメータを決める研究がおこなわれ，その値を参考にして流体シミュレーションがおこなわれた．結果，クォーク・グルーオン・プラズマの粘性は，確かに超弦理論の予言に近いことが判明した．

このように，あらためて歴史をふり返ってみると，RHICの公式発表で超弦理論が言及されたのは，やや先走っていた感がある．と言うのも，RHICの結果が本当に超弦理論の予言通りなのか，2005年の時点ではわかっていなかったからである．しかし，最初から厳密である必要もないのだろう．この公式発表が1つのきっかけとなり，理論・実験の関係が成熟していったのだから．

こういった理論と実験のフィードバックは，理論と実験の関係が密接な分野では，日常的に起こっているのだろう．この物語に学ぶべき教訓があるとすれば，もっとも重要な教訓は，理論と実験の関係は当初当事者たちですら思いもよらなかった分野間でも起こりう

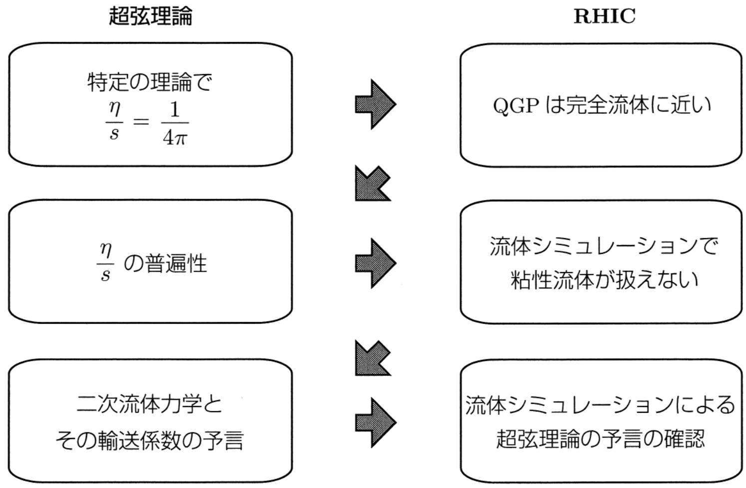


図 3　超弦理論と RHIC 実験のフィードバック（QGP はクォーク・グルーオン・プラズマの略称）.

る，ということだろう.

草稿を読んで有益なコメントを寄せていただいた岡村隆さん（関西学院大学），平野哲文さん（上智大学）に感謝します.

参考文献

1) 夏梅誠，数理科学 2006 年 7 月号；数理科学 2008 年 2 月号；数理科学 2011 年 12 月号；日本物理学会誌 2007 年 9 月号.
2) 夏梅誠，『超弦理論の応用—物理諸分野での AdS/CFT 双対性の使い方—』（サイエンス社 SGC ライブラリ 93，2012）.
3) G. Policastro, D.T. Son and A.O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 081601 [hep-th/0104066].
4) First Three Years of Operation of RHIC, *Nucl. Phys. A* **757** (2005), issues 1-2.
5) http://www.bnl.gov/newsroom/news.php?a=1303
6) 引用数は以下のデータベースに基づく：http://inspirehep.net
7) P. Kovtun, D.T. Son and A.O. Starinets, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601 [arXiv:hep-th/0405231].
8) J. Mas, *JHEP* **0603** (2006) 016 [arXiv:hep-th/0601144]; D.T. Son and A.O. Starinets, *JHEP* **0603** (2006) 052 [arXiv:hep-th/0601157]; O. Saremi, *JHEP* **0610** (2006) 083 [hep-th/0601159]; K. Maeda, M. Natsuume and T. Okamura, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 066013 [arXiv:hep-th/0602010].
9) D. Teaney, *Phys. Rev. C* **68** (2003) 034913 [arXiv:nucl-th/0301099].
10) A. Nakamura and S. Sakai, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 072305 [arXiv:hep-lat/0406009]; H.B. Meyer, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 101701 [arXiv:0704.1801 [hep-lat]].
11) 例えば，T. Hirano and K. Tsuda, *Phys. Rev. C* **66** (2002) 054905 [nucl-th/0205043].
12) R. Baier, P. Romatschke, D.T. Son, A.O. Starinets and M.A. Stephanov, *JHEP* **0804** (2008) 100 [arXiv:0712.2451 [hep-th]]; S. Bhattacharyya, V.E. Hubeny, S. Minwalla and M. Rangamani, *JHEP* **0802** (2008) 045 [arXiv:0712.2456 [hep-th]]; M. Natsuume and T. Okamura, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 066014 [arXiv:0712.2916 [hep-th]].
13) ただちに応用された例として，例えば，M. Luzum and P. Romatschke, *Phys. Rev. C* **78** (2008) 034915 [arXiv:0804.4015 [nucl-th]]; H. Song and U.W. Heinz, *Phys. Rev. C* **78** (2008) 024902 [arXiv:0805.1756 [nucl-th]].
14) レビューとしては，例えば J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U.A. Wiedemann, arXiv:1101.0618 [hep-th]; O. DeWolfe, S.S. Gubser, C. Rosen and D. Teaney, arXiv:1304.7794 [hep-th].
15) T. Sakai and S. Sugimoto, *Prog. Theor. Phys.* **113** (2005) 843 [hep-th/0412141].
16) レビューとしては，例えば G.T. Horowitz, *Lect. Notes Phys.* **828** (2011) 313 [arXiv:1002.1722 [hep-th]].
17) レビューとしては，例えば T. Faulkner, N. Iqbal, H. Liu, J. McGreevy and D. Vegh, arXiv:1003.1728 [hep-th].

（なつうめ・まこと，高エネルギー加速器研究機構）

ハイゼンベルグの不確定性関係の実験的検証

藤川　和男

物理学は実験科学であり，すべての理論は最終的には実験でその成否が決められる．アインシュタインは晩年「公理論的な物理理論」の定式化の重要性も述べたことがある．確かに自由な発想を阻害しないという姿勢は重要であるが，最終的には物理の理論は数学とは異なり実験で成否を決めるという事実には変わりはない．このような物理理論の実験的な検証にもいろいろな段階が考えられる．例えば，毎日のように多くの若い（あるいは年寄りも含む？）理論物理の研究者が提案している「新しい試みとかアイデア」の検証は，多くの場合実験物理学者の時間的制約および実験にかかる費用という観点から，まず実験的な検証の段階には至らないのが普通である．多くの理論的な提案の中から，文字通り「千に三つ」くらいあるいはもっと少数の提案が実験的な検証に値すると判断されて，実際に実験が行われることになる．有名な例は，CERN で行われているヒッグス粒子の実験的な検証で，数千人の研究者が参加し文字通り国家予算規模の資金を投じて研究が行われている．

また物理学の理論という観点から見ても，いろいろなレベルの理論が考えられる．中でも，ほとんどすべての研究者が正しい（あるいは，新しい理論を考えるときの出発点とするのが適切である）と考える理論がある．量子力学がその代表例である．次々と提案されているほとんどすべての新しいと思われる物理学の理論的なアイデアは量子力学が正しいと仮定して行われている．しかし，最近，この正しいと信じられている量子力学の実験的な検証が行われ，話題を集めた．話題になった実験は，ウィーン工科大で行われたハイゼンベルグの不確定性関係の検証に関するものである[1]．この実験にまつわる理論的な側面の簡単な解説（個人的な独断を含む）が本稿の主目的である．量子力学はその概念的な側面で，我々の日常的な感覚に基づく古典的な考察では理解が難しい側面が多く，したがって，その実験的な検証の評価も難しいということになる．

1. 量子力学

量子力学の基礎方程式であるシュレーディンガーの方程式は，$\hbar$ をプランク定数として

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x})=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(\vec{x})\right]\psi(t,\vec{x}) \quad (1)$$

で与えられる．上式では，1 粒子の場合の式を書いたが 2 粒子あるいはより多くの粒子の場合も同様に与えられる．この式の特徴は線形方程式という点であり，したがって，$\psi_1(t,\vec{x})$ と $\psi_2(t,\vec{x})$ が解の場合にはその和

$$\psi(t,\vec{x})=\psi_1(t,\vec{x})+\psi_2(t,\vec{x}) \quad (2)$$

も解になる．これは**重ねあわせの原理**と呼ばれ，非常に基本的で干渉効果やエンタングルメントと呼ばれる現象を引き起こす．

電子のような素粒子は**スピン**と呼ばれる固有角

運動量の自由度を持っており，その自由度に着目して他の自由度を無視した（非相対論的な近似）式を書くとシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)=\left[-\mu\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right]\psi(t) \tag{3}$$

の形に書かれる．ここで μ は定数で，$\vec{\sigma}=(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ は 2 行 2 列のパウリ行列

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{4}$$

を表し，$\vec{B}$ は磁場を表す．スピン自身は

$$\vec{s}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \tag{5}$$

で表され，重要な性質として

$$[s_x,s_y]=i\hbar s_z \tag{6}$$

という角運動量の交換関係を満たす．この場合は波動関数は 2 成分で表され

$$\psi(t)=\begin{pmatrix}\psi_1(t)\\\psi_2(t)\end{pmatrix} \tag{7}$$

の形を持つ．

量子力学に物理的な意味を与える上では，**ボルンによる確率解釈**が基本的である．すなわち，シュレーディンガーの波動関数は確率振幅であるとする考えである．例えば

$$\psi(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{8}$$

というスピンの波動関数を考えると

$$\psi^\dagger s_x\psi=0,\quad \psi^\dagger s_y\psi=0,\quad \psi^\dagger s_z\psi=\frac{\hbar}{2} \tag{9}$$

が得られるが，この物理的な意味は，上記の与えられた波動関数で記述される粒子のスピンを“同じようなサンプルをたくさん用意して測定を繰り返す”と平均として，$\langle s_x\rangle=0$, $\langle s_y\rangle=0$, $\langle s_z\rangle=\hbar/2$ という結果が得られるという予言である．ただし，本稿では $\langle s_x\rangle=\psi^\dagger s_x\psi$ という記法をよく用いる．上記の状態は

$$s_z\psi=\frac{\hbar}{2}\psi \tag{10}$$

という s_z の固有状態にあるので，$s_z=\hbar/2$ という固有値を何回測定しても得られる．しかし，重要なことは，上記の波動関数は

$$\psi(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{11}$$

のように，s_x の固有値 $\pm\hbar/2$ の（規格化された）固有状態

$$s_x\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad s_x\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-\frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{12}$$

の和に書くことができることである．したがって，

$$\psi^\dagger s_x\psi=\frac{1}{2}\left[\frac{\hbar}{2}-\frac{\hbar}{2}\right]=0 \tag{13}$$

となり，個々の測定においては s_x の固有値が $\hbar/2$ の場合と $-\hbar/2$ の場合が観測され，それぞれの確率が 1/2 で起こるので測定を繰り返すと結果として $\langle s_x\rangle=0$ となる．このことは

$$\psi^\dagger s_x^2\psi=\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \tag{14}$$

となることからも確かめられる．量子力学の特性として，$\pm\hbar/2$ がそれぞれ確率 1/2 で起こることを予言するが，いつ $+\hbar/2$ が起こり，いつ $-\hbar/2$ が起こるかは予言できない．同様に

$$\psi^\dagger s_y\psi=\frac{1}{2}\left[\frac{\hbar}{2}-\frac{\hbar}{2}\right]=0,\quad \psi^\dagger s_y^2\psi=\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \tag{15}$$

となることも確かめられる．

一般に**標準偏差**を $\Delta(O)=\sqrt{\langle O^2\rangle-\langle O\rangle^2}$ で定義すると，上記の状態に対しては

$$\Delta(s_z)=0,\quad \Delta(s_x)=\frac{\hbar}{2},\quad \Delta(s_y)=\frac{\hbar}{2} \tag{16}$$

が成立する．すなわち，演算子の固有状態に属す

る状態の場合のみ標準偏差は 0 になるが，一般には標準偏差は 0 にならない．すなわち**無分散**(dispersion-free) ではない．これが量子力学の特性であり，不確定性関係を与える基礎になる*1)．

2. 不確定性関係

ハイゼンベルグが有名な不確定性関係を提唱したのが 1927 年である[2]．これはよく知られているように顕微鏡を用いた電子の位置と運動量の測定に関する思考実験に基づいている．電子の位置を測定するのに X 線を用いると，位置の測定の精度は X 線の波長程度になるので，誤差は

$$\Delta x \sim \lambda \tag{17}$$

である．ところが，アインシュタインの光量子論(あるいはド・ブローイの関係から)，波長が λ の X 線は電子に

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\lambda} \tag{18}$$

の大きさの運動量を与える．したがって，電子の位置を測定しようとすると運動量に騒乱を与えてしまい，その積は

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar \tag{19}$$

の大きさの程度になる．これが有名なハイゼンベルグの不確定性関係と呼ばれるものであり，量子力学では位置と運動量は同時に正確に決定できないという事実を表し，自然科学のみならず哲学等を含むより広い範囲に大きな影響を与えた．ハイゼンベルグはこの関係を量子力学の物理的な基礎に据えたが，この式をさらに精密に定義するという努力はしなかったようである．

この関係式は，1927 年に Kennard により現在ほとんどの教科書に採用されている式

$$\Delta(x)\Delta(p) \geq \frac{1}{2}\hbar \tag{20}$$

の形に定式化された[3]．ただし，

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}, \\ \Delta(p) &= \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} \end{aligned} \tag{21}$$

のようにそれぞれの変数の "不確定性" は標準偏差で与えられるものとされた．この式の標準的な解釈は，以下のようになる．同じ量子状態を表すと考えられるサンプルを多数用意して，まず座標のみを測定して，その標準偏差を計算する．次に同様なサンプルに対して，運動量のみを測定して，その標準偏差を計算する．このようにして得られた標準偏差の積が (20) のように不確定性関係を満たす．

少し遅れて，Robertson は 1929 年に (20) を一般化して，任意のエルミート演算子（例えば，スピンを含む）に対して

$$\Delta(A)\Delta(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \tag{22}$$

の関係式を与えた[4]．ただし，$\Delta(A)$, $\Delta(B)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}, \\ \Delta(B) &= \sqrt{\langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2} \end{aligned} \tag{23}$$

で定義される標準偏差である．この式の標準的な解釈は (20) と同様であり，例えばスピンを考えた場合，$A = s_x$ および $B = s_y$ に選ぶと，

$$\Delta(s_x)\Delta(s_y) \geq \frac{1}{2}|\langle[s_x, s_y]\rangle| = \frac{\hbar}{2}|\langle s_z\rangle| \tag{24}$$

を意味する．

これらの公式は量子力学の基礎知識だけで証明され，したがって非常に基本的なものであるが，ハイゼンベルグが最初に不確定性関係を提唱したように，ある物理量（例えば座標）の測定とその結果としての正準共役な量（例えば運動量）の揺らぎという基本的な考察が少なくとも "標準的な解釈" では明らかではない．

---

*1) いわゆる隠れた変数の理論と呼ばれるものは，例えば，$\psi^\dagger s_x \psi = \int d\lambda P(\lambda) s_x(\psi, \lambda)$ で量子論の結果を出す試みである．ここで，$s_x(\psi, \lambda)$ は，波動関数 ψ と隠れた変数 λ で決められる古典的な数であり演算子 s_x の固有値 $\pm\hbar/2$ を取る．$P(\lambda)$ は隠れた変数 λ が実現される確率であり $\int d\lambda P(\lambda) = 1$ を満たす．隠れた変数を知っている人にとっては，$s_x(\psi, \lambda)$ は古典的に決まった量であり無分散である．この立場では，不確定性関係は隠れた変数に関して平均化した量を見ている結果と理解される．スピン 1/2 の場合には，$s_x(\psi, \lambda)$ が具体的に構成されることが知られている．

3. ウィーン工科大での実験

このような通常の不確定性関係の定式化とハイゼンベルグのもともとのアイデアの食い違いに異議を唱え，ハイゼンベルグの最初の考えに近い形で不確定性関係を定式化し，このように定式化された関係式は必ずしもいつも成立するわけではないことを示したのが名古屋大の小澤正直氏である[5,6]．また，この考えを実験的に検証したのが長谷川祐司氏を中心とするウィーン工科大の研究者である[1]．結果は，理論的な予想通りに，小澤氏の提唱した素朴なハイゼンベルグ型の関係式はスピンの例では成立しない．この結果をどのように理解するかは後ほど述べることにして，まず実験の概要を説明したい．

基本的には z 軸方向へスピンが揃った

$$\psi = |+z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

の波動関数で記述される中性子のビームを用意し，中性子の x 方向のスピン $A = \sigma_x$ をまず測定し，その結果としてスピンの y 方向の成分 $B = \sigma_y$ がどのような影響を受けるかが測定された（ただし，文献1) に従い $\hbar/2 = 1$ という規約（単位系）で考えているので，スピン角運動量はパウリの行列と一致することになる）．しかし，**測定の演算子 M** が導入される点と故意に x 軸方向から少しずれた方向

$$\sigma_\phi = \cos\phi\sigma_x + \sin\phi\sigma_y \tag{26}$$

を測定して，実験データを増やした点が素朴な考察とは異なる．角度 $0 \leq \phi \leq \pi/2$ は "ずれの角" と呼ばれている．数式で書くと，スピンの成分 σ_ϕ を測定した後の測定器の読み M^{out} およびその結果として予想される他のスピン成分 B^{out} は

$$\begin{aligned}\langle M^{\mathrm{out}}\rangle &= \langle\psi|\sigma_\phi|\psi\rangle, \\ \langle B^{\mathrm{out}}\rangle &= \langle\psi|E_\phi(+)\sigma_y E_\phi(+) \\ &\quad + E_\phi(-)\sigma_y E_\phi(-)|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\sin\phi\sigma_\phi|\psi\rangle\end{aligned} \tag{27}$$

で与えられる．ここで，$E_\phi(\pm)^2 = E_\phi(\pm)$ を満たす射影演算子

$$E_\phi(\pm) = \frac{1 \pm \sigma_\phi}{2} \tag{28}$$

が導入されているが，σ_ϕ 方向のスピンを測定器 M で測ると状態 ψ がそちらへ向くのでその状態 $E_\phi(\pm)\psi$ で B の最終状態が予測されるわけである（密度行列の記法では，純粋状態 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ が測定により，混合状態 $\rho_f = E_\phi(+)|\psi\rangle\langle\psi|E_\phi(+) + E_\phi(-)|\psi\rangle\langle\psi|E_\phi(-)$ に移る）．このとき，**A の測定のエラー**は

$$\epsilon(A) \equiv \sqrt{\langle(M^{\mathrm{out}} - A)^2\rangle} = 2\sin\frac{\phi}{2}, \tag{29}$$

B の擾乱（disturbance）は

$$\eta(B) \equiv \sqrt{\langle(B^{\mathrm{out}} - B)^2\rangle} = \sqrt{2}\cos\phi, \tag{30}$$

A と B の標準偏差は $A^2 = B^2 = 1$ を考慮して

$$\Delta(A) = \Delta(B) = 1 \tag{31}$$

である．

これらの計算の直感的な説明は，まず

$$\begin{aligned}&\langle(M^{\mathrm{out}} - A)^2\rangle \\ &= \langle(M^{\mathrm{out}})^2 - AM^{\mathrm{out}} - M^{\mathrm{out}}A + A^2\rangle\end{aligned} \tag{32}$$

であるが，測定器が σ_ϕ を正確に測定していると仮定しているので $M^{\mathrm{out}} = \sigma_\phi$ と置き換えて，

$$\begin{aligned}\langle(M^{\mathrm{out}} - A)^2\rangle &= \langle(\sigma_\phi)^2 - \sigma_x\sigma_\phi - \sigma_\phi\sigma_x + \sigma_x^2\rangle \\ &= \langle 2 - 2\cos\phi\rangle \\ &= 4\sin^2\frac{1}{2}\phi\end{aligned} \tag{33}$$

から $\epsilon(A) = 2\sin\frac{\phi}{2}$ が得られる．他方

$$\begin{aligned}&\langle(B^{\mathrm{out}} - B)^2\rangle \\ &= \langle(B^{\mathrm{out}})^2 - B^{\mathrm{out}}B - BB^{\mathrm{out}} + B^2\rangle \\ &= \langle E_\phi(+)\sigma_y^2 E_\phi(+) + E_\phi(-)\sigma_y^2 E_\phi(-)\rangle \\ &\quad -\langle[E_\phi(+)\sigma_y E_\phi(+) + E_\phi(-)\sigma_y E_\phi(-)]\sigma_y \\ &\quad +\sigma_y[E_\phi(+)\sigma_y E_\phi(+) + E_\phi(-)\sigma_y E_\phi(-)]\rangle \\ &\quad +\langle\sigma_y^2\rangle \\ &= 2\cos^2\phi\end{aligned} \tag{34}$$

から $\eta(B) = \sqrt{2}\cos\phi$ が得られる．

このとき，小澤氏の提案した**ハイゼンベルグ型の不確定性関係**[5,6]

$$\epsilon(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2}|[A, B]| \tag{35}$$

は

$$\epsilon(A)\eta(B) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\phi}{2}\cos\phi \geq 1 \qquad (36)$$

を与えるが，これはすべての角度 $0 \leq \phi \leq \pi/2$ で成立しない．

4. ハイゼンベルグの関係式は本当に破れているのか

既に述べたようにハイゼンベルグは不確定性関係の基本的な思想を述べたが，それが何を意味するかという数学的に精密な定式化を与えなかった．例えば，ハイゼンベルグが不確定性関係として意味したものがKennardやRobertsonが与えた関係式とすると，これらの関係式は演算子の交換関係と量子力学は負の確率を含まないという2つの事実に基づいており，したがって量子力学が成立する限り常に成立する．すなわち，小澤氏が提唱した関係式(35)は素朴な意味ではハイゼンベルグの関係式とも理解できるが，これ以外の関係式を考えるとハイゼンベルグのアイデアは常に正しいという考えも成立する．

この最後の考え方の概要を以下で説明したい．

まずRobertsonの関係式は任意の演算子に対して成立するので，**ハイゼンベルグ描像**で（一般に時間に依存する）エルミート演算子に対して

$$\begin{aligned}&\Delta(M^{\mathrm{out}}-A)\Delta(B^{\mathrm{out}}-B)\\ &\geq \frac{1}{2}|\langle[M^{\mathrm{out}}-A, B^{\mathrm{out}}-B]\rangle|\end{aligned} \qquad (37)$$

が成立する．また

$$\begin{aligned}\epsilon(A)&=\sqrt{\langle(M^{\mathrm{out}}-A)^2\rangle}\geq\Delta(M^{\mathrm{out}}-A),\\ \eta(B)&=\sqrt{\langle(B^{\mathrm{out}}-B)^2\rangle}\geq\Delta(B^{\mathrm{out}}-B)\end{aligned} \qquad (38)$$

に注意すると

$$\begin{aligned}&\epsilon(A)\eta(B)\\ &\geq \frac{1}{2}|\langle[M^{\mathrm{out}}-A, B^{\mathrm{out}}-B]\rangle|\\ &= \frac{1}{2}|\langle[M^{\mathrm{out}}-A, B]+[A, B^{\mathrm{out}}-B]+[A,B]\rangle|\\ &\geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| - \frac{1}{2}|\langle[M^{\mathrm{out}}-A, B]\rangle|\\ &\quad - \frac{1}{2}|\langle[A, B^{\mathrm{out}}-B]\rangle|\end{aligned} \qquad (39)$$

のように $[M^{\mathrm{out}}, B^{\mathrm{out}}]=0$ を考慮すると第2の表式が得られ，さらに2次元面での三角不等式を用いると最後の式が成立する[8]．これらの式と，同様に導かれる式

$$\begin{aligned}\epsilon(A)\Delta(B) &\geq \frac{1}{2}|\langle[M^{\mathrm{out}}-A, B]\rangle|,\\ \Delta(A)\eta(B) &\geq \frac{1}{2}|\langle[A, B^{\mathrm{out}}-B]\rangle|,\\ \Delta(A)\Delta(B) &\geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|\end{aligned} \qquad (40)$$

を組み合わせると

$$\begin{aligned}&\epsilon(A)\eta(B)+\epsilon(A)\Delta(B)+\Delta(A)\eta(B)\\ &\geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|\end{aligned} \qquad (41)$$

および $\bar{\epsilon}(A)=\epsilon(A)+\Delta(A)$, $\bar{\eta}(B)=\eta(B)+\Delta(B)$ を定義すると

$$\bar{\epsilon}(A)\bar{\eta}(B) \geq |\langle[A,B]\rangle| \qquad (42)$$

が導かれる．

これらの関係式(39)から(42)はすべて，Robertsonの関係式から導かれしたがって普遍的に成立する不等式である．事実，(41)は小澤氏により提案された普遍的に成立する式であり[5]，(42)はその不等式の形から筆者が「普遍的なハイゼンベルグの関係式」と呼んだらどうかと提案した式である[7]．(42)は，Arthurs–Kellyの式として知られている不等式とも密接に関係している．

ウィーン工科大での実験との関連で言えば[1]，(39)の第2の表式（Robertsonの関係式そのもの）は

$$\begin{aligned}\epsilon(A)\eta(B) &= 2\sqrt{2}\sin\frac{\phi}{2}\cos\phi\\ &\geq 2\sin^2\frac{\phi}{2}\cos\phi\end{aligned} \qquad (43)$$

を与え，普遍的なハイゼンベルグの関係式(42)は

$$\left(2\sin\frac{\phi}{2}+1\right)(\sqrt{2}\cos\phi+1) \geq 2 \qquad (44)$$

を与える．これらは，小澤氏の提案した3個の項を左辺に含む式(41)，すなわち

$$2\sqrt{2}\sin\frac{\phi}{2}\cos\phi + 2\sin\frac{\phi}{2} + \sqrt{2}\cos\phi \geq 1 \qquad (45)$$

と共に，$0 \leq \phi \leq \pi/2$ に対して常に成立する．ただし，(43) では $\phi = 0$ と $\phi = \pi/2$ で等号が成立するが，(44) と (45) は下限に到達しない．他方，素朴なハイゼンベルグ型の関係式 (35) が成立しないのは，(39) の最後の式の右辺で一部の項を無視した結果である（これは専門用語では，必ずしも正当化されない「不偏測定の仮定」をしていることに対応する[8]）．

5. 結論

小澤氏の分析およびウィーン工科大の実験により，ハイゼンベルグの不等式の意味するところのより深い考察が日本国内外で行われており，基礎物理学に刺激を与える考察と実験であった．それでは，本当にハイゼンベルグの不確定性関係が破れているのであろうか？ 式 (39) からわかるように知られているすべての不等式は Robertson の式から得られ，その導出過程で正当化されない仮定を用いた素朴なハイゼンベルグ型の関係式 (35) が実験と矛盾している．このことから，筆者はハイゼンベルグの基本的な考えは正しく，広く受け入れられているように初等的な量子力学の考察から証明できる Kennard および Robertson の不等式 (37) を不確定性関係と理解すれば，実験結果はすべて矛盾なく理解できると考えている．

参考文献

1) J. Erhart, *et al.*, *Nature Phys.* **8**, 185 (2012).
2) W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43**, 172 (1927).
3) E.H. Kennard, *Z. Phys.* **44**, 326 (1927).
4) H.P. Robertson, *Phys. Rev.* **34**, 163 (1929).
5) M. Ozawa, *Phys. Rev. A***67**, 042105 (2003).
6) M. Ozawa, *J. Opt. B***7**, S672 (2005).
7) K. Fujikawa, *Phys. Rev. A***85**, 062117 (2012).
8) K. Fujikawa and K. Umetsu, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 013A03 (2013).

（ふじかわ・かずお，東京大学名誉教授，理化学研究所）

例題形式で探求する微積分学の基本定理
関数の性質から幾何構造を探る
第6回

線積分(2)

森田 茂之

6.1 閉じた微分式と完全な微分式

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上の微分式（1 次の微分形式ともいう）

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

は，ある関数 $F : U \to \mathbb{R}$ の微分 dF の形でかけるとき，完全（exact）と呼ぶのであった．今回は，微分式が完全となるための条件の考察を始める．簡単のために，まず $n=2$ の場合を考えよう．与えられた微分式 $\omega = fdx + gdy$ が完全，すなわち $\omega = dF$ となる関数 F が存在したとすれば

$$fdx + gdy = dF = F_x dx + F_y dy$$

から

$$f = F_x, \quad g = F_y$$

となる．したがって，ω が完全となるためには等式 $f_y = F_{xy}, g_x = F_{yx}$ から

$$f_y = g_x$$

であることが必要条件であることが分かる（これは C^1 級の ω に対して成立する）．同様にして $n=3$ の場合には $\omega = fdx + gdy + hdz$ が完全，すなわち $\omega = dF$ と表されるためには，等式

$$fdx + gdy + hdz = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

から，上記と同様にして

$$f_y = g_x, \quad g_z = h_y, \quad h_x = f_z$$

という完全性のための必要条件が得られる．一般の n の場合には

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i \neq j)$$

が ω の完全性のための必要条件となる．

一般に上記の必要条件を満たす微分式は，**閉じた**（closed）**微分式**（あるいは 1 次の**閉微分形式**（closed differential form)）と呼ばれる．

定義から完全な微分式は閉じていることになるが，逆に

閉じた微分式は完全か？

という自然な問いが生まれる．この問題については，現在では完全な解答が与えられている．次の節で簡単に背景を説明するが，それはドラム理論という本連載を超える枠組みで初めて定式化されるものである．本連載ではこのことは念頭に置きつつも，$\mathbb{R}^n$ とくに $\mathbb{R}^2$ あるいは $\mathbb{R}^3$ の開集合の場合について，言わば発見的にこの問題を考えてみることにする．

まず関数 F の微分 dF から元の関数 F が再現できるかどうかを考えよう．$n=1$ の場合は，関数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の微分 f' から元の関数の再現の問題であるが，微積分学の基本定理から，点 $a \in \mathbb{R}$ を任意に定めれば

$$\int_a^x f'(x)dx = f(x) - f(a)$$

となる．したがって，定数の任意性だけを除いて f' から f が再現できる．すなわち，原始関数は不定積分により求まるという事実そのものが，上記の問題に解答を与えるのである．

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された関数 $F:U \to \mathbb{R}$ の場合も，前回証明した線積分に対する微積分学の基本定理を使えば次のことが言える．すなわち，ある 1 点 $\mathrm{P} \in U$ における F の値 $F(\mathrm{P})$ が分かれば，P と曲線で結べる任意の点 $\mathrm{Q} \in U$ における F の値 $F(\mathrm{Q})$ は線積分によって求めることができる．具体的には，P から Q に至る任意の曲線を C とするとき，等式

$$\int_C dF = F(\mathrm{Q}) - F(\mathrm{P})$$

が成立するのであった．したがって，そのような曲線を一つ選んで線積分を実行すれば，$F(\mathrm{Q})$ の値が求まる．言い換えると，定数の任意性を除けば，関数 F はその微分 dF から線積分により再現することができるのである．

上記の事実を基に，閉じた微分式がいつ完全といえるかという問題に戻ろう．$\mathbb{R}^2$ 上で定義された C^1 級の微分式

$$\omega = f dx + g dy$$

が閉じている，すなわち $f_y = g_x$ であると仮定しよう．もし ω が完全ならば，$dF = \omega$ となる関数 F は（定数を除き）線積分により求まるはずである．そこで，任意の点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，原点 $(0, 0)$ と (x, y) とを結ぶ道として，図 6.1 に示すように，原点 $(0, 0)$ から x 軸上を $(x, 0)$ まで進み，次に $(x, 0)$ を通り x 軸と直交する直線上を (x, y) まで進む道を C とする．そして

$$F(x, y) = \int_C f dx + g dy$$

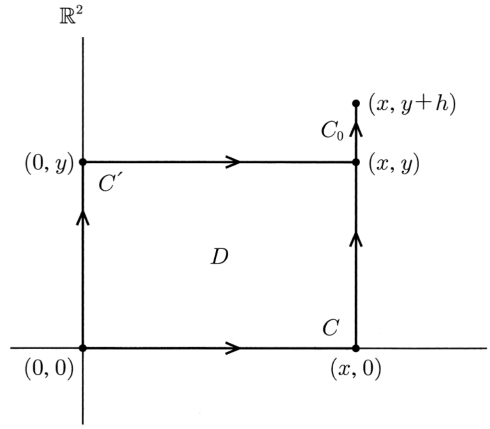


図 6.1　積分路 C, C'.

とおくことにより，関数 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を定義する．期待されるのは，等式 $dF = fdx + gdy$ すなわち

$$F_x = f, \quad F_y = g$$

が成立することであるが，実際そうなることを以下に示そう．まず $F_y = g$ は次のようにして比較的簡単に確かめられる．道 C の終点 (x, y) と $(x, y + h)$ を結ぶ線分を C_0 とする（図 6.1 参照）．このとき F の定義から

$$F(x, y + h) = \int_{C \cup C_0} fdx + gdy$$

となる．線積分の道に関する加法性を使えば

$$F(x, y + h) - F(x, y) = \int_{C_0} fdx + gdy = \int_y^{y+h} gdy \tag{6.1}$$

となる．ここで積分の平均値の定理を使うと，ある定数 $0 < \theta < 1$ が存在して

$$\int_y^{y+h} gdy = hg(x, y + \theta h)$$

となる．したがって

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x, y + h) - F(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} g(x, y + \theta h) = g(x, y)$$

となり，$F_y = g$ となることが証明された．あるいは，少し分かりにくいかも知れないが，次のように考えることもできる．式 (6.1) の各項を，x, y はそれぞれ定数とし h の関数と見る．このとき，左端の項の h に関する導関数の $h = 0$ における値は $F_y(x, y)$ となる．一方，右端の項を h の関数と見たとき，その導関数は微積分学の基本定理により，$g(x, y + h)$ となる．ここで $h = 0$ とおけば，$g(x, y)$ となり，$F_y(x, y)$ と一致することが示せた．

次に $F_x = f$ を示したいのであるが，上記と同様の議論をすることはできないことがすぐに分かる．そこで F の定義において，積分路である C を同じ図 6.1 の C' に替えて得られる関数

$$\bar{F}(x, y) = \int_{C'} fdx + gdy$$

について考えよう．こうすれば上記と同様の議論により

$$\bar{F}_x = f$$

であることが示される．したがって $\bar{F} = F$ であることが示せれば $dF = \omega$ の証明が終わることになる．そこで 2 つの道の和 $\widetilde{C} = C \cup -C'$（$-C'$ は C' の向きを逆にしたもの）を考えれば，これは 4 点 $(0,0), (x,0), (x,y), (0,y)$ を頂点とする長方形 D の境界を表す単純閉曲線となる．ここで前回述べたグリーンの定理を適用すれば

$$\int_{\widetilde{C}} f dx + g dy = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dy$$

となる．右辺は仮定 $f_y = g_x$ から 0 となる．一方，左辺は

$$\int_{\widetilde{C}} f dx + g dy = \int_C f dx + g dy - \int_{C'} f dx + g dy = F(x,y) - \bar{F}(x,y)$$

となり，結局 $\bar{F} = F$ が示された．

上記では $\mathbb{R}^2$ の場合を扱ったが，証明を少し工夫すれば一般の $\mathbb{R}^n$ に対して成立することが分かる．すなわち次の定理が得られる．

定理 6.1　$\mathbb{R}^n$ 全体で定義された C^1 級の微分式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

が完全であるための必要十分条件は，それが閉じていることである．

例題 6.1　上記の定理 6.1 の $n = 3$ の場合を証明せよ．

解答　微分式

$$\omega = f dx + g dy + h dz$$

が閉じている，すなわち条件

$$f_y = g_x, \quad g_z = h_y, \quad h_x = f_z$$

が満たされていると仮定して，$\omega = dF$ となる関数 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ の存在を示そう．$n = 2$ の場合の証明を参考にして，次のように求める関数 F を定義する．任意の点 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ に対して，原点 $(0,0,0)$ と (x,y,z) とを結ぶ道を C として，図 6.2 を参照しながら次の 6 通りのものを考える．

$$C_1 = [xyz], \quad C_2 = [yzx], \quad C_3 = [zxy],$$
$$C_4 = [xzy], \quad C_5 = [yxz], \quad C_6 = [zyx].$$

まず C_1 は原点 $(0,0,0)$ から x 軸上を $(x,0,0)$ まで進み，次に $(x,0,0)$ を通り xz 平面と直交し y 軸と平行な直線上を $(x,y,0)$ まで進み，最後に $(x,y,0)$ を通り xy 平面と直交し z 軸と平行な直線上を (x,y,z) まで進む道である．これを上記では簡単に $[xyz]$ と記した．それはこの道は，初め x 軸の方向に進み，続いて y 軸の方向，そして最後に z 軸の方向に進む道だからである．残りの 5

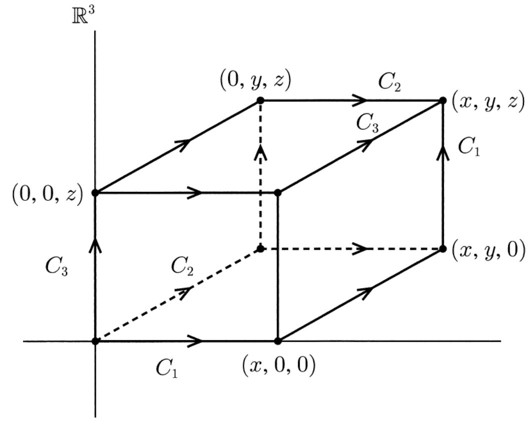


図 6.2　積分路 C_i $(i = 1, \cdots, 6)$.

個の道は，それぞれに記されている x, y, z の順番に従って，原点から図 6.2 の直方体の 3 本の辺を辿って点 (x, y, z) に至る道である．

さて 6 個の関数 $F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, 6)$ を

$$F_i(x, y, z) = \int_{C_i} f dx + g dy + h dz$$

とおくことにより定義する．このとき，定義からまず

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = g, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = h$$

であることが分かる．なぜならば，例えば F_2 の線積分を行う道 C_2 は，最後の部分で x 軸と平行な線分での関数 f の線積分であり，したがってこれを x に関して偏微分すれば，元の関数 f に戻るからである．

一方，図 6.2 の直方体の 6 個の面の，いずれかを含む平面においてグリーンの定理を適用することにより，6 個の関数 F_i は実はすべて一致することが分かる．例えば，平面 $z = 0$ 上でグリーンの定理を適用すれば等式 $F_1 = F_5$ が示され，また平面 $x = 0$ 上でグリーンの定理を適用すれば $F_2 = F_6$ であることが分かる．

以上をまとめると結局 $dF = \omega$ が成立することが示され，証明が終わる．

例題 6.2

$$\omega = (4x^3 + 6x^2y + 2xy^2 - y^3)dx + (cx^3 + 2x^2y - 3xy^2 + 1)dy$$

が閉じた微分式となるように定数 c を定めよ．次に，そのような c に対して

$$\omega = dF$$

となるような 2 変数関数 $F(x, y)$ を求めよ．

解答　まず

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^3 + 6x^2y + 2xy^2 - y^3) = 6x^2 + 4xy - 3y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(cx^3 + 2x^2y - 3xy^2 + 1) = 3c\,x^2 + 4xy - 3y^2$$

から ω が閉じているためには $c = 2$ であることが必要十分であることが分かる．次に $c = 2$ として，図 6.1 に示すように，任意の点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，原点 $(0, 0)$ から x 軸上を $(x, 0)$ まで進み，次に y 軸と平行な直線上を (x, y) まで進む道を C とする．このとき

$$F(x, y) = \int_C \omega$$

とすれば，例題 6.1 の解答から $dF = \omega$ となる．上式を線積分の定義により計算すれば

$$\begin{aligned} F &= \int_0^x 4x^3 dx + \int_0^y (2x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + 1)dy \\ &= x^4 + 2x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y \end{aligned}$$

を得る．

例題 6.3（“勾配は渦なし” の逆） $\mathbb{R}^3$ 上の C^1 級のベクトル場 X が渦なし，すなわち $\mathrm{rot}\, X = \mathbf{0}$ ならば，ある関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が存在して

$$X = \mathrm{grad}\, f$$

となることを示せ．

解答　X を成分を用いて $X = (u, v, w)$ と表し，$\mathbb{R}^3$ 上の微分式 ω を

$$\omega = udx + vdy + wdz$$

により定義する．一方，条件 $\mathrm{rot}\, X = \mathbf{0}$ から

$$(w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y) = \mathbf{0}$$

となる．これはちょうど ω が閉じている条件と一致している．したがって，定理 6.1 より ω は完全，すなわちある関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\omega = df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

と書けることになる．これは証明すべき式 $X = \mathrm{grad}\, f$ と等価であり，証明が終わる．

この節の最後に, 複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合 U で定義された複素数値関数 $f : U \to \mathbb{C}$ について，微分式および線積分を考えよう．まず線積分の定義を複素数値関数に対して一般化することは，第 1 回に与えた実数値関数の線積分の定義をほんの少しだけ修正すればよい．念のため簡単に記しておく．微分式についても同様である．

C を U 内の区分的に C^1 級の向き付けられた曲線とする．このとき，f の C に沿う線積分

$$\int_C f(z)dz$$

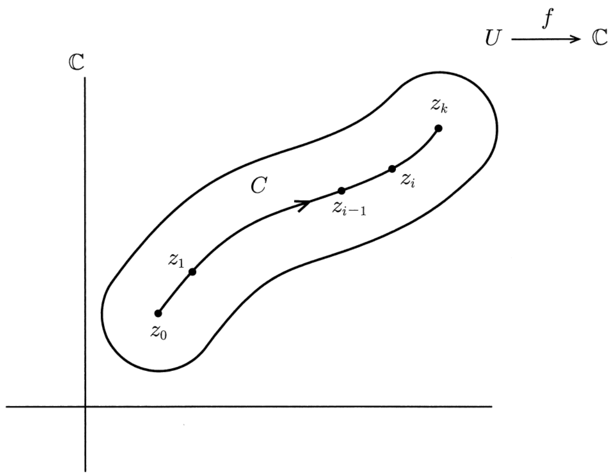


図 6.3　複素数値関数の線積分.

を次のように定義する．曲線 C を，t をパラメータとして

$$C = \{(u(t), v(t)) \in \mathbb{C}; t \in [a, b]\}$$

とパラメータ表示しておく．t を変数とする有界閉区間 $I = [a, b]$ 上に分点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < b = t_k$$

を取って分割 Δ を作る．$z_i = (u(t_i), v(t_i)) \in C \subset \mathbb{C}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ とおけば，これらは C 上の分点となる（図 6.3 参照）．このとき

$$\int_C f(z)dz = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(z_i)(z_i - z_{i-1}) \tag{6.2}$$

と定義するのである．f が連続ならば右辺は収束する．

z および $f(z)$ をそれぞれ実部と虚部に分けて

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

と表せば

$$f(z)dz = (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) = (udx - vdy) + i(udy + vdx)$$

であるから

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$$

と，通常の実数値関数の線積分によって表されることが分かる．

複素数値の微分式は，その実部と虚部のいずれもが閉じているとき，閉じた微分式という．

定理 6.2　複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合 U で定義された複素数値関数 $h: U \to \mathbb{C}$ が正則ならば，微分式 $h(z)dz$ は閉じている．

例題 6.4　上記の定理 6.2 を証明せよ．

解答 正則関数 h を実部と虚部に分けて $h=\varphi+i\psi$ と書けば，第4回で述べたように φ,ψ は次のコーシー・リーマン方程式

$$\varphi_x=\psi_y, \quad \varphi_y=-\psi_x$$

を満たす．これらはそれぞれ，$h(z)dz$ の虚部 $\varphi dy+\psi dx$ および実部 $\varphi dx-\psi dy$ が閉じていることと等価である．

上記の定理と前回述べたグリーンの定理を組み合わせると，次のコーシーの積分定理が得られる．

定理 6.3（コーシーの積分定理） U を複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合とし，$h:U\to\mathbb{C}$ を正則関数とする．C を U 内の区分的に C^1 級の単純閉曲線とし，C が囲む区域 D は U に含まれているものとする．このとき

$$\int_C h(z)dz=0$$

である．

6.2 完全性の条件

上記で見たように，$\mathbb{R}^n$ の場合はすべての閉じた微分式は完全であることが分かった．しかし，複素平面から原点を除いた領域で正則な微分式 $\frac{dz}{z}$ は定理 6.2 により閉じているが，時計と反対回りに向き付けられた単位円周 $S^1\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に沿う線積分の値は，良く知られているように

$$\int_{S^1}\frac{dz}{z}=2\pi i \quad \text{(コーシーの公式)}$$

となる．証明は本連載のこれまでの記述を使えば比較的簡単にできるので，読者は試みてほしい．したがってこの微分式は完全ではない．このように，$\mathbb{R}^2$ の開集合と思える $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ においては，微分式が閉じていることと完全であることには差が生じて来る．$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の間に現れるこの違いは，それらの2つの空間の“形状”の違いに由来するのである．

実は現在では閉じた微分式と完全な微分式の差は，1次元**ドラム・コホモロジー群**と呼ばれる“不変量”によって完全に記述できることが分かっている．さらにそれは $\mathbb{R}^n$ の開集合ばかりではなく，現代幾何学の主要な研究対象である微分可能多様体すべてに対して成立し，1次だけではなく高次の微分式（微分形式）に対して成立する定理（ドラムの定理）として定式化されている．

ドラムの定理は，ガウス（Gauss），リーマン（Riemann）そしてポアンカレ（Poincaré）に起源を持ち，現在に至るまで発展をし続けている現代幾何学の基本定理の一つである．本連載はこれの紹介を目的とするものではないが，このことを念頭にして現代幾何学に至る一つの道筋を示してみたい．

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

凸計画法とゲーム理論の情報幾何

甘利 俊一

線形計画法に端を発する数理計画法で，凸計画法と呼ばれる広い分野がある．凸関数，凸領域が主役を演じるので，情報幾何の立場で考察するのがふさわしい．ここでは，最適化の内点法[1,2]と情報幾何の関係を述べるが，計算アルゴリズムを具体的に述べることはしない．線形計画法がリーマン空間に関係することもよく知られている[3]．しかし，リーマン計量だけにとどまらず双対幾何の構造を用いることが重要で，Karmarkar の内点法が情報幾何の双対測地線に対応することは以前に田辺と土屋に指摘された[4,5]．また，小原と土屋は，計算の手間が内点法の解曲線の双対曲率で評価できることを示した[6]．

これとは別に，不確定状況での決定は自然を相手とするゲームであると考え，Bayes 推論による最適性を追求する立場がある[7~9]．特に，確率分布を推論するときに，Bayes 損失関数として何を用いるかに応じて，確率分布族に種々の幾何構造が入る．今回はゲーム理論がもたらす情報幾何を調べる[11~13]．

26.1 凸領域と最適化問題

いま，$\boldsymbol{\theta}$ を座標系とする空間に，有界な凸領域 Ω が定義されているとしよう．Ω の内部で定義された関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ で，境界に近づくと無限大に発散する凸関数を障壁関数という．点を Ω の内部に閉じ込めておくためにこの関数が役に立つ．凸領域 Ω で，境界 $\partial\Omega$ の点 ω における支持超平面を

$$\sum_i A_i(\omega)\theta^i - b(\omega) \geq 0 \tag{26.1}$$

と書こう（図 26.1）．Ω の境界は区分的に滑らかとするが，端点では，支持超平面が多数あるかもしれない．このときは，必要最低限のものだけを考えれば良い．

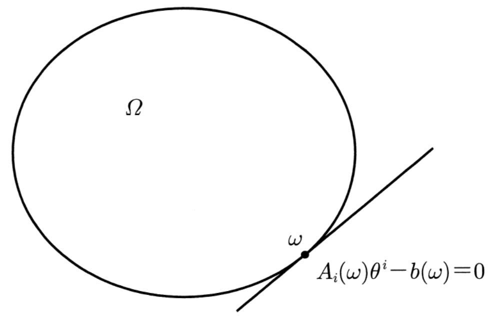


図 26.1　Ω とその支持超曲面.

$$-\log\left\{\sum A_i(\omega)\theta^i - b(\omega)\right\} \tag{26.2}$$

という関数を考えれば，これは明らかに境界点 ω で無限大に発散する．対数関数に限ることはなく，自己整合条件（self-concordant）[2] と呼ぶ条件を満たす関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ で良いのだが，ここでは最も簡単な場合だけを考える．

$w(\omega)$ を正の関数としたとき（$w(\omega) = 1$ としてもよい）

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = -\int_{\partial\Omega} w(\omega)\log\left\{\sum A_i(\omega)\theta^i - b(\omega)\right\} d\omega \tag{26.3}$$

という関数は，望みの条件を満たす凸関数である．

領域 Ω 上で，目的関数 $C(\boldsymbol{\theta})$ が与えられたときに，これを最小にする点 $\boldsymbol{\theta}^*$ を求めるのが，凸領域計画問題である．目的関数が線形で

$$C(\boldsymbol{\theta}) = \sum c_i\theta^i \tag{26.4}$$

と書ける場合が，線形目的関数の凸計画問題である．

例として線形計画法を考えよう．線形計画法は $m+n$ 個の制限条件

$$\sum A_{\kappa i}\theta^i - b_\kappa \ge 0, \quad \theta^i \ge 0, \quad \kappa = 1, \cdots, m;\ i = 1, \cdots, n \tag{26.5}$$

の下で，関数 $C(\boldsymbol{\theta})$ を最小にする $\boldsymbol{\theta}^*$ を求める問題である．このとき，条件 (26.5) を満たす $\boldsymbol{\theta}$（これを許容解と呼ぶ）の集合 Ω は，凸多面体をなす．関連した障壁凸関数は

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \sum_\kappa w_\kappa \log\left(\sum A_{\kappa i}\theta^i - b_\kappa\right) \tag{26.6}$$

と書ける．$w_\kappa > 0$ は何でもよく，$w_\kappa = 1$ としてよい．

26.2 凸領域が導く双対アファイン構造

境界で無限大に発散する滑らかな凸関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ が，凸領域上に与えられたとしよう．我々は (26.3) を考えるが，もっと一般的なものでもよい．このとき，凸関数 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ は，$\boldsymbol{\theta}$ をアファイン座標，その Legendre 変換

$$\boldsymbol{\eta} = \nabla\psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{26.7}$$

を双対アファイン座標とする，双対平坦なリーマン空間を導く．リーマン計量は $\boldsymbol{\theta}$ 座標系で，

$$g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \partial_i \partial_j \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{26.8}$$

で与えられる．双対座標系でも双対凸関数 $\psi^*(\boldsymbol{\eta})$ が存在し，その Hessian が双対座標 $\boldsymbol{\eta}$ でのリーマン計量であるが，これは (26.8) の逆行列になる．

双対アファイン座標とリーマン計量を (26.3) の場合に計算すると，

$$\eta_i = -\int \frac{w(\omega)A_i(\omega)}{\sum A_k(\omega)\theta^k - b(\omega)} d\omega, \tag{26.9}$$

$$g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \int \frac{w(\omega)A_i(\omega)A_j(\omega)}{\left\{\sum A_k(\omega)\theta^k - b(\omega)\right\}^2} d\omega. \tag{26.10}$$

26.3 内点法：自然勾配最急降下法

線形計画問題を解く simplex 法は，凸領域の多面体の単点をたどりながら最適解に行き着く方法である．これに対して内点法は Ω の内部をたどりながら最適解に到達する方法である[1,2]．素朴な内点法は，現在の候補 $\boldsymbol{\theta}$ を，目的関数 $C(\boldsymbol{\theta})$ が最も減る方向に動かしていく最急降下法である．しかし，Ω はリーマン構造を持つので，関数 $C(\boldsymbol{\theta})$ の再急方向は自然勾配

$$\tilde{\nabla} C(\boldsymbol{\theta}) = G^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \nabla C(\boldsymbol{\theta}) \tag{26.11}$$

で与えられる．線形目的関数の場合，$C(\boldsymbol{\theta})$ の勾配，$\boldsymbol{c} = (c_i)$, $c_i = \nabla C(\boldsymbol{\theta})$ は共変ベクトルであって，$\boldsymbol{\theta}$ の変化方向を示す反変ベクトルではない．だから，最急降下法は，ε をステップサイズとして，

$$\Delta \boldsymbol{\theta} = -\varepsilon \tilde{\nabla} C(\boldsymbol{\theta}) = -\varepsilon G^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{c} \tag{26.12}$$

と書ける．

いま，連続パラメータ t を用いて，再急降下の方向をたどる解を $\boldsymbol{\theta}(t)$ と書くと，微分方程式で

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^t = -\varepsilon G(\boldsymbol{\theta})^{-1} \boldsymbol{c} \tag{26.13}$$

のように書ける．これを差分法で解くのが Karmarkar の与えたアファイン射影法である．この方法で，線形計画問題が多項式時間で解けることが知られている．

解の方程式を双対座標で表せば，(26.13) は

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = -\varepsilon \boldsymbol{c} \tag{26.14}$$

となって解は，$\boldsymbol{c}_0$ を任意定数として

$$\boldsymbol{\eta}(t) = -\varepsilon t \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}_0 \tag{26.15}$$

で与えられる．これは双対座標で線形の曲線であるから双対測地線である．

実際に求めるのは，アファイン座標 $\boldsymbol{\theta}(t)$ である．$\boldsymbol{\theta}(t)$ を求めるのに，$\boldsymbol{\eta}$ を $\boldsymbol{\theta}$ に変換する計算は手数がかかる．したがって実際は，時間ステップを有限に刻んで微分方程式 (26.13) を差分方程式に直し数値的に解く．このために，問題を双対空間でも表現して，主—双対法としてニュートン法を用いて解く方法が一般的であるが[1)]，その詳細はここでは述べない．

26.4 障壁関数と中心軌道

見方を変えて，t をパラメータとして，次の関数

$$L(\boldsymbol{\theta}, t) = tC(\boldsymbol{\theta}) + \psi(\boldsymbol{\theta}) \tag{26.16}$$

を考える．これは，目的関数に障壁の効果を加えたもので，これを最小化する解は障壁を越えないから Ω の内部に留まる．この解は t の関数であるから $\boldsymbol{\theta}^*(t)$ のように書く．事実，解が障壁に近づけば $\psi(\boldsymbol{\theta})$ が大きくなるから，これで解は障壁を乗り越えない．また，t が無限大になれば，障壁の効果は無視できるので，$\boldsymbol{\theta}^*(t)$ は最適解に収束する．

(26.16) を $\boldsymbol{\theta}$ で微分して 0 とおくと，最適解は

$$\boldsymbol{\eta}^*(t) = \boldsymbol{\eta}\left\{\boldsymbol{\theta}^*(t)\right\} = -t\boldsymbol{c} \tag{26.17}$$

を満たす．$t = 0$ のときは $\boldsymbol{\eta}^*(0) = 0$ で，これを Ω の中心と呼ぶ．$\boldsymbol{\theta}^*(t)$ は Ω の中心を通り，最終的に最適解に向かう双対測地線であり，最適解 $\boldsymbol{\theta}^*$ に向かう解の一つである．これを中心軌道と呼ぶ．これは中心から出発する最急降下解になっている（図 26.2）．

解の軌道を求めるにあたって，差分を用いて計算を進めるが，差分のステップを大きく取れれば，最適解に至る計算の手間は少なくて済む．中心軌道が真っすぐであれば，一回の計算で大きな歩幅がとれるが，曲がっていれば，細かい刻みが必要である．そのときの曲がり具合をどう評価するかが問題である．アファイン座標 $\boldsymbol{\theta}$ で，この中心解軌道 $\boldsymbol{\theta}^*(t)$ の性質を調べてみると，解をある精度の下で得るに必要な手間は，中心曲線 $\boldsymbol{\theta}^*(t)$ の双対埋め込み曲率で評価できるという，大変面白い結果が得られている[6)]．

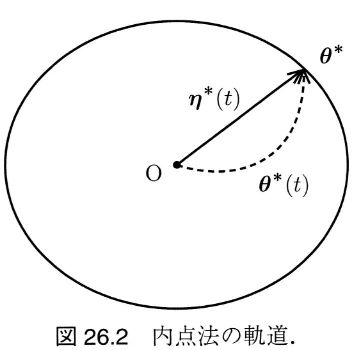


図 26.2　内点法の軌道．

26.5 半正定値計画

正定値行列 X のなす空間を考える．これは正のコーン（錐）をなす．ここに，線形の等式または不等式の制約条件，例えば A_κ を行列として，

$$\mathrm{tr}\,(A_\kappa X) - b_\kappa = 0, \quad \kappa = 1, \cdots, m \tag{26.18}$$

を考える．この制約を満たす領域は凸領域である．

ここで，定数行列 C を用いて目的関数を

$$C(X) = \mathrm{tr}(CX) \tag{26.19}$$

と置く．これを最小化する解 X を求める問題は半正定値計画問題と呼ばれ，制御その他の問題で多用されている．この問題も上記のように，情報幾何の立場から考えることができる．例えば，小原はいち早く，半正定値問題の情報幾何を展開している[7]．

行列の空間で，正定値という領域に対応する障壁関数として

$$\psi(X) = -\log\det|X| \tag{26.20}$$

を用いることができる．ここから得られる双対アファイン座標は $-X^{-1}$ である．この幾何構造は，平均 0 の分散行列を X の多変量のガウス分布の作る確率分布族の幾何と同じものである．

26.6 正定値行列の情報幾何

正定値行列は，それ自体興味ある研究の対象である．対角行列に限るならば，そのトレースが 1 である場合は確率分布，トレースが任意に正の値を取る場合は正測度とみなせる．したがって，正定値行列の作る空間は確率分布や正測度の空間を拡張したものといえる．連載第 2 回で少し例を示したが，ここで正定値行列の空間の情報幾何構造を述べておく．

正定値行列 P の凸関数 $\psi(P)$ を考えよう．このとき 2 つの行列 P, Q の間に Bregman ダイバージェンス

$$D[P:Q] = \psi(P) - \psi(Q) - \nabla\psi(Q)\cdot(P-Q) \tag{26.21}$$

が定義できる．ただし ∇ は行列による微分で，行列の内積は

$$\nabla\psi(Q)\cdot P = \mathrm{tr}(\nabla\psi(Q)P). \tag{26.22}$$

ここから得られる幾何学は双対平坦なリーマン空間である．アファイン座標系は P 自身，双対アファイン座標系は

$$P^* = \nabla\psi(P) \tag{26.23}$$

である．

行列の凸関数として，直交変換で不変な次のものを考える．$f(x)$ を x の凸関数とする．P の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ として，f から導ける

$$\psi(P)=\sum f\left(\lambda_i\right)=\mathrm{tr}f(P) \tag{26.24}$$

は P の凸関数である[8~10)]．f をいろいろに選ぶことで，いろいろなダイバージェンスが導かれる．

1. $f(\lambda)=\frac{1}{2}\lambda^2$ のとき，

$$\psi(P)=\frac{1}{2}\sum\lambda_i^2,\quad D[P:Q]=\frac{1}{2}\|P-Q\|^2. \tag{26.25}$$

ただし $\|\cdot\|$ は Frobenius ノルムで

$$\|P\|^2=\sum P_{ij}^2. \tag{26.26}$$

空間はユークリッド的であり，平坦座標（双対平坦座標）は P 自身である．

2. $f(\lambda)=-\log\lambda$ のとき，

$$\psi(P)=-\log(\det|P|), \tag{26.27}$$

$$D[P:Q]=\mathrm{tr}\left(PQ^{-1}\right)-\log\left(\det\left|PQ^{-1}\right|\right)-n. \tag{26.28}$$

アファイン座標系は P 自身，双対アファイン座標系は P^{-1} となる．これは分散行列を P とするガウス分布のなす幾何に等しい．

3. $f=\lambda\log\lambda-\lambda$ のとき，

$$\psi(P)=\mathrm{tr}\left(P\log P-P\right), \tag{26.29}$$

$$D[P:Q]=\mathrm{tr}\left(P\log P-P\log Q-P+Q\right). \tag{26.30}$$

これは，量子情報理論で良く出てくるダイバージェンスで，アファイン座標は P 自身，双対アファイン座標は $\log P$ になる．$\psi(P)$ は von Neumann エントロピーである．

4. 正定値行列の (u,v) 構造

これまでは P の凸関数 $\psi(P)$ を考えた．しかし，以前に正測度の空間に幾何を導入したときのように，P を変換して $u(P)$ と表現を変え，これを座標としよう．u の凸関数から双対平坦な幾何を導入できる．いま，$u(\xi),v(\xi)$ を，$u(0)=0, v(0)=0$ を満たす単調増大な関数とする．このとき，

$$\Theta=u(P),\quad H=v(P) \tag{26.31}$$

をそれぞれ行列 P の u 表現，v 表現と呼ぶ．ここで以前やったように関数

$$h(\theta)=\frac{v'\left\{u^{-1}(\theta)\right\}}{u'\left\{u^{-1}(\theta)\right\}},\quad k(\eta)=\frac{u'\left\{v^{-1}(\eta)\right\}}{v'\left\{v^{-1}(\eta)\right\}} \tag{26.32}$$

と，さらにその積分，

$$\psi(\theta)=\int\int h(\theta)d\theta^2,\quad \varphi(\eta)=\int\int k(\eta)d\eta^2 \tag{26.33}$$

を導入する．これらを使って，行列の関数

$$\psi(\Theta)=\mathrm{tr}\psi\left\{\Theta(P)\right\},\quad \varphi(H)=\mathrm{tr}\varphi\left\{H(P)\right\} \tag{26.34}$$

を定義しよう．すると，P の関数 ψ と φ は P に関しては凸ではないが，行

列 Θ, H の関数とみると，それぞれが Legendre 変換で結ばれた凸関数になる．ここから 2 つの行列のダイバージェンス

$$D[P:Q] = \psi\{\Theta(P)\} + \varphi\{H(Q)\} - \Theta(P)\cdot H(Q) \tag{26.35}$$

が導ける．これは双対平坦な構造を与える．アファイン座標は $\Theta(P)$，双対アファイン座標は $H(Q)$ である．特に，

$$u(\xi) = \xi^\alpha, \quad v(\xi) = \xi^\beta \tag{26.36}$$

と置くのが α-β 構造である．ポテンシャル関数は

$$\psi(\Theta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{tr}\Theta^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{tr}P^{\alpha+\beta}, \tag{26.37}$$

$$\varphi(H) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{tr}H^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{tr}P^{\alpha+\beta} \tag{26.38}$$

であり，ダイバージェンスは

$$D[P:Q] = \mathrm{tr}\left\{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}P^{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}Q^{\alpha+\beta} - P^\alpha Q^\beta\right\} \tag{26.39}$$

となる．

ここで α を $(1-\alpha)/2$，β を $(1+\alpha)/2$ と置いたものが α ダイバージェンスである．これは

$$f(\lambda) = \frac{4}{1-\alpha^2}\left(\lambda^{\frac{1+\alpha}{2}} - \lambda\right), \quad |\alpha| < 1 \tag{26.40}$$

と置いたものに等しく，

$$\psi(P) = \frac{4}{1-\alpha^2}\mathrm{tr}\left(P^{\frac{1+\alpha}{2}} - P\right), \tag{26.41}$$

$$D[P:Q] = \frac{4}{1-\alpha^2}\mathrm{tr}\left(-P^{\frac{1+\alpha}{2}}Q^{\frac{1+\alpha}{2}} + \frac{1+\alpha}{2}P + \frac{1-\alpha}{2}Q\right) \tag{26.42}$$

である．ただ，$f(\lambda)$ は λ の凸関数ではない．これは $\lambda^{\frac{1-\alpha}{2}}$ の凸関数である．したがって，$\psi(P)$ は $P^{\frac{1-\alpha}{2}}$ の凸関数である．ここから出る双対平坦の幾何において，アファイン座標系は $P^{\frac{1-\alpha}{2}}$，双対アファイン座標系は $P^{\frac{1+\alpha}{2}}$ である．

26.7 ゲーム理論から見た確率分布空間の構造

確率にかかわる推論を，自然を相手とするゲームと見る立場がある[11~13]．ここでは，自然は確率変数 x を分布 $p(x)$ にしたがって出す．x に対して，決定者は，可能な行動（アクション）の一つ $a \in A$ を選ぶ．A はアクションの集合である．x に対して a を選んだときの損失を $l(x,a)$ と書こう．x はランダムに発生するから，a を選んだときの期待損失は

$$L(p,a) = E[l(x,a)] = \int p(x)l(x,a)dx \tag{26.43}$$

となる．確率分布 p がわかっていて，x を見ないままで決定を下せというなら

ば，上記の $L(p,a)$ を最小にする a を選ぶことになる．

ここでは，アクション A として確率分布を一つ選ぶことを考える．すなわち，A は確率分布の集合，$A=\{q(x)\}$ となる．x を一つ見て，$q(x)$ を選ぶ行動に対する損失を特にスコアと呼び，

$$S(x,q)=l(x,q) \tag{26.44}$$

と書くことにする．独立な $x_1,\cdots,x_N$ が同一の分布 $p(x)$ から出るとすれば，これらを見て $q(x)$ を選ぶときの損失（スコア）は，E を経験分布

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta\left(x-x_i\right) \tag{26.45}$$

についての期待値として，次のように得ることができる．

$$S\left(x_1,\cdots,x_N,q\right)=E_{\hat{p}}[S(x,q)]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}S\left(x_i,q\right). \tag{26.46}$$

損失の例を挙げておこう．統計学で通常使うものは対数損失，すなわち

$$S(x,q)=-\log q(x) \tag{26.47}$$

である．ここでは確率の対数に負の符号を付けた（対数尤度を負にしたもの）．x に対して，その確率 $q(x)$ が大きいほどスコア，すなわち損失は小さい．他のスコアは後に挙げることにして，理論の枠組みに進む．

いま真の分布が $p(x)$ であるとして，スコアの期待値を取り，

$$H(p:q)=E_p[S(x,q(x))] \tag{26.48}$$

と置こう．対数損失の場合には

$$H(p:q)=-\int p(x)\log q(x)dx \tag{26.49}$$

となるから，これは相対エントロピーである．とくに

$$H(p:p)=-\int p(x)\log p(x)dx \tag{26.50}$$

は Shannon のエントロピーになる．そこで，ダイバージェンスを

$$D[p:q]=H(p:p)-H(p:q) \tag{26.51}$$

で定義すれば，これは対数損失の場合には，KL ダイバージェンスに一致する．一般の損失関数の場合にも，ダイバージェンスを (26.51) で定義すれば，確率分布の空間に，損失関数に依存した新しい双対接続のリーマン空間が定義される．これが，自然を相手とする損失ゲームから導かれる確率分布の空間の幾何学構造である．対数損失の場合は，これは不変な幾何に一致する．

凸関数 $\psi(\theta)$ が与えられた場合，ここから Bregman ダイバージェンスを介して双対平坦な幾何が導けた．ゲームの損失（スコア）を $\psi(\theta)$ を用いて，

$$S(x,q)=-\psi'\{q(x)\}-\int[\psi\{q(y)\}-q(y)\psi'\{q(y)\}]\,dy \tag{26.52}$$

で与えてみよう．いささかテクニカルであるが，ここから相対エントロピー

$$H(p:q)=\int p(x)S(x,q)dx \tag{26.53}$$

が出る．エントロピーは簡単で

$$H(p)=S(p,p)=-\int\psi\{p(x)\}\,dx, \tag{26.54}$$

ダイバージェンスは，凸関数 ψ を使った 2 点のダイバージェンス

$$d(p:q)=\psi(p)-\psi(q)-\psi'(q)(p-q) \tag{26.55}$$

の積分

$$D[p:q]=\int d[p(x):q(x)]dx \tag{26.56}$$

である．上記の枠組みが Bregman スコアである．$\psi(p)=p\log p$ の場合が対数損失であり，ここからは不変の幾何が得られる．

少し変わった損失として，$p(x)$ の微係数を使う，Hyvarinen スコアがある[14, 15]．これは，$l(x)=\log q(x)$ として，

$$S(x,q)=l''(x)+\frac{1}{2}\{l'(x)\}^2 \tag{26.57}$$

と置くもので，$l(x)=\log q(x)$ の値ではなくてその微係数に依存することが特徴である．もちろん，x がベクトルのときにも容易に拡張できる．ここから得られるダイバージェンスは

$$D[p:q]=\frac{1}{2}\int\left\{\frac{d}{dx}\log p(x)-\frac{d}{dx}\log q(x)\right\}^2dx. \tag{26.58}$$

エントロピーは

$$H(p)=-\frac{1}{2}\int\{l'(x)\}^2\,dx. \tag{26.59}$$

これらの量は，2 つの特徴を持つ．一つは，ダイバージェンスが p と q に関して対称であることである．したがって，空間は自己双対であり，通常のリーマン空間になる．ここから得られる計量テンソルは，確率分布をパラメータ $\boldsymbol{\xi}$ を用いて $p(x,\boldsymbol{\xi})$ とすれば，

$$g_{ij}(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial\xi_i}l'(x,\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial\xi_j}l'(x,\boldsymbol{\xi})dx \tag{26.60}$$

となる．分布が指数型分布族

$$p(x,\boldsymbol{\theta})=\exp\left\{\theta^ik_i(x)-\psi(\boldsymbol{\theta})\right\} \tag{26.61}$$

であれば，

$$D\left[p\left(x,\boldsymbol{\theta}_1\right):q\left(x,\boldsymbol{\theta}_2\right)\right]=g_{ij}\left(\theta_1^i-\theta_2^i\right)\left(\theta_1^j-\theta_2^j\right), \tag{26.62}$$

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\int k'_i(x)k'_j(x)dx \tag{26.63}$$

であるから，これはユークリッド空間に他ならない．

もう一つの特徴は，上記の構造を規格化定数をなしにして正測度空間に拡張しても，ダイバージェンスが不変であることである．すなわち，c, c' を勝手な正の定数として，

$$D\left[cp(x) : c'q(x)\right] = D[p(x) : q(x)] \tag{26.64}$$

が成立するということである．したがって，この構造を用いて統計的推論を行うのに，規格化定数の計算は不要である．Bayes 推論にかかわる多くの問題で，規格化定数を求めるのに複雑な積分を必要とする難点があった．Hyvarinen はこれを避ける方法として，新しいスコアを導入した[14)]．

スコアを用いた統計的推論では，データから得られる経験分布 $\hat{p}(x)$ に対して相対エントロピー $S(\hat{p}, q)$ を最小にする q を求めればよい．候補の分布が $q(x, \boldsymbol{\xi})$ とパラメータを使って書かれている場合は

$$S(\hat{p}, q) = N\sum S\left\{x_i, q\left(x_i, \boldsymbol{\xi}\right)\right\} \tag{26.65}$$

の最小化である．いま，

$$\boldsymbol{s}(x, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} S\left\{x, q(x, \boldsymbol{\xi})\right\} \tag{26.66}$$

を用いると，推定方程式は

$$\sum \boldsymbol{s}\left(x_i, \boldsymbol{\xi}\right) = 0 \tag{26.67}$$

となる．ここからわかるように $\boldsymbol{s}(x, \boldsymbol{\xi})$ は推定関数で，

$$E[\boldsymbol{s}(x, q)]\begin{cases} = 0, & p = q, \\ \neq 0, & p \neq q \end{cases} \tag{26.68}$$

を満たす．

通常は，推定は経験分布 $\hat{p}(x)$ に近いものを分布族 $q(x, \boldsymbol{\xi})$ の中から選ぶ．これには，規格化定数の計算が必要で，指数型分布族ならば，これは $\exp\{-\psi\}$ であった．$q(x, \boldsymbol{\xi})$ の形はわかるが，それを積分して規格化定数を求めるのが難しい場合に，これを避けるうまい計算法があれば助かる．Hyvarinen は $l(x, \xi) = \log p(x, \xi)$ を x で微分すれば，$l'(x, \xi)$ は $q(x, \xi)$ でも $cq(x, \xi)$ でも同じであることに目を付けた．今，経験分布を滑らかにしたものを $\tilde{p}(x)$ と書き，その対数の微分を

$$\tilde{l}'(x) = \frac{d}{dx}\log \tilde{p}(x) \tag{26.69}$$

とする．このとき，損失関数として

$$J(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\int \tilde{p}(x)\left\{l'(x, \boldsymbol{\xi}) - \tilde{l}'(x)\right\}^2 dx \tag{26.70}$$

を考える．部分積分を行えば，$\boldsymbol{\xi}$ に関係しない項を C として，

$$J = E_{\tilde{p}}\left[l''(x,\xi) + \frac{1}{2}\{l'(x,\boldsymbol{\xi})\}^2\right] + C \tag{26.71}$$

となる．ここから Hyvarinen スコアが出る．

終わりの一言

情報幾何はいろいろな分野で活躍している．今回は，凸計画法を取り上げその情報幾何構造を調べ，またゲーム理論の立場から確率分布空間に導入される幾何について簡単に論じた．いずれも，詳しい話は専門の教科書または論文に当たられたい．

情報幾何の連載も，いよいよ最終局面に差し掛かった．次回からは，これが脳科学にどう関係するのかを述べてみたい．脳科学特に理論脳科学ではいま，多くの俊英が活躍している．私はとてもかなわない．その中で，情報幾何の観点で脳を調べることに，私はかろうじて活路を見出している．

参考文献

1) 小島政和，土屋隆，水野真治，矢部博，『内点法』，朝倉書店，2001.
2) Y. Nesterov and A. Nemirovskii, *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Algorithms*, SIAM Publications, 1993.
3) Y. Nesterov and M. Todd, On the Riemannian geometry defined by self-concordant barriers and interior-point methods, *Foundations of Computational Mathematics*, **2**, 333–361, 2002.
4) 田辺国士，土屋隆，「線形計画法の新しい幾何」，数理科学，**303**, 32–37, 1988.
5) K. Tanabe, Geometric method in nonlinear programming, *J. Optimization Theory and Applications*, **30**, 181–210, 1980.
6) A. Ohara and T. Tsuchiya, An information geometric approach to polynomial-time interior-point algorithms—Complexity bound via curvature integral, 2007, to appear.
7) A. Ohara, Information geometric analysis of an interior point method for semidefinite programming, O. Barndorff-Nielsen and E. Jensen eds, *Geometry in Present Day Science*, World Scientific, 49–74, 1999.
8) I.S. Dhillon and J.A. Tropp, Matrix nearness problems with Bregman divergences, *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, **29**, 1120–1146, 2007.
9) A.S. Lewis, Convex analysis on the Hermitian matrix functions, *J. Convex Analysis*, **2**, 173–183, 1995.
10) H.H. Bauschke and P.L. Borwein, Legendre functions and the method of random Bregman projections, *J. Convex Analysis*, **4**, 27–67, 1997.
11) F. Topsoe, Information-theoretical optimization techniques, *Kybernetik*, **15**, 8–27, 1979.
12) P.D. Grünwald and A.P. Dawid, Game theory, maximum entropy, minimum discrepancy and robust Baysian decision theory, *Annals of Statistics*, **32**, 1367–1433, 2004.
13) A.P. Dawid, The geometry of proper scoring rules, *Ann. Inst. Statistical Mathematics*, **59**, 77–93, 2007.
14) A. Hyvarinen, Estimation of non-normalized statistical models by score matching. *J. Machine Learning Research*, **6**, 695–709, 2005.
15) M. Parry, A.P. Dawid and S. Lauritzen, Proper local scoring rule, *Annals of Statistics*, **40**, 561–592, 2012.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

科学と社会

Science & Society

第16回　国家・学問・戦争の諸相

量子力学が意味したもの(1)

米国の場合

岡本　拓司

前々回, 前回は, 第一次大戦後の日本の科学の特徴を伝える事例を取り上げた. 今回と次回は, 戦間期の科学界に生じた大事件である量子力学の登場に注目し, 特に, この理論に基づく物理学の発展とともに科学研究において躍進を遂げた2地域, すなわちアメリカ合衆国と日本の動向について論ずる.

16.1 量子力学誕生前後のアメリカの物理学

量子物理学誕生前後のアメリカの物理学史は, 日本ではあまりそう意識されることはないが, 世界的にみれば研究の集中している対象であり, 広く知られた現代物理学史の通史でも, 既存の研究を用いるとアメリカ中心に記述が偏る惧れがあるが致し方ないと断っている[1]. 2つの世界大戦を含む時期に, アメリカの物理学は, 学問の内実とそれをとりまく社会制度の両面において, 他の地域・時代にはない大きな変容を遂げており, 多くの研究者が, 第二次大戦後の科学の特質を検討するための材料や, 学問と社会の関わり全般を考えるための課題を, そこに見出してきた. それらの全貌を記すことはできないが, 以下では幾つかの特徴的な論点を検討してみよう.

16.2 物理学者の亡命とアメリカ

科学史にあまり詳しくなくとも, アメリカと物理学といえば, 第二次大戦中, この国が多くの物理学者を動員して原子爆弾の開発に成功したことにはすぐに思い当たるであろう. 第二次大戦下では, アメリカの敵国であったドイツや日本でも原子力の軍事利用が目指されたが, これに成功したのはアメリカのみであった (英国などの協力もあった). アメリカの原爆開発成功の背景には, 連邦政府が注ぎ込んだ財政的な支援 (科学技術関連予算は, 戦時下では年間4,800万ドルから5億ドルへと急増した[2]) があったことは確かであるが, 具体的な開発には多くの優れた物理学者が必要であった. そのような物理学者たちが, なぜ第二次大戦当時のアメリカにいたのであろうか.

すぐに思い当たるのは, ナチスやファシストによるユダヤ人の迫害を逃れて亡命してきた, 自身や家族がユダヤ系であったり, ユダヤ系でなくとも中欧の政治状況全般を嫌った物理学者たちであろう. 実際, 原爆開発に当たっても, フェルミ (妻がユダヤ人. Enrico Fermi, 1901–1954), フランク (James Franck, 1882–1964) などの亡命物理学者たちが重要な役割を果たしている. 他国から亡命して間もない人々の多くを最新兵器を開発す

る極秘計画の枢要に関わらせたという点には，アメリカという国の成り立ちの特異性を見ることができる．原爆開発計画自体が，ドイツが先に核分裂の軍事利用に成功することを惧れたユダヤ系の亡命物理学者たちの動きから始まっており，具体的にはアインシュタイン（Albert Einstein, 1879–1950）の署名したローズヴェルト大統領（Franklin Delano Roosevelt, 1882–1945）宛ての 1939 年夏の手紙がその端緒であった．手紙を実際に草したのは，ハンガリー生れの物理学者，シラード（Leo Szilard, 1898–1964）であり，友人のウィグナー（Eugene Paul Wigner, 1902–1995）とテラー（Edward Teller, 1908–2003）に相談した上でのことである[3)]．関わったすべての人物が亡命者であった．

ただし，計画が進展すると，シラードを含む亡命者たちの一部は「敵性外国人」として原爆開発からは排除され，また計画の研究面を指揮したのは，アメリカ人のオッペンハイマー（J. Robert Oppenheimer, 1904–1967）であった．開発を支えた物理学者の大半は，まだ若かったファインマン（Richard Phillips Feynman, 1918–1988）などを含む，米国で育った科学者たちであったことも間違いない．亡命物理学者たちの多くは 1930 年代後半になってからアメリカにやってきたのであり，それ以前からこの国には，物理学者を育成し，物理学研究の隆盛をもたらした動きがあったと考えなければならない．

また，亡命してきた知識人たちの専門分野が多岐にわたっていたにも関わらず，物理学者の存在が特に顕著である点にも注意すべきであろう．数としては化学者が多く，学問的な貢献では数学者も顕著であるが（1965 年のアメリカ科学アカデミーの数学部門の会員 51 人のうち 14 人がヨーロッパ出身であった[4)]），大学に職を得る機会に最も恵まれたのは物理学者たちであった[5)]．物理学者の存在が際立つのは第二次大戦中の活動ゆえでもあるが，それ以前から，アメリカでは自然科学の中でも特に物理学が，大学で教育と研究に従事できる人材を必要としており，亡命者に職を提供できるほどの活況を呈していた．

さらに，上述の事情とやや矛盾するようではあるが，ヨーロッパの物理学者であれば，だれでも職が得られたわけではなかった．アインシュタインのように突出した存在であれば問題はなかったが，ノーベル賞受賞者であっても，彼より若いシュレーディンガー（Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887–1961）は，すでに研究能力の頂点は過ぎていると看做され，亡命を望んだもののアメリカで職を得ることはできなかった．反対に，若いハイゼンベルク（Werner Karl Heisenberg, 1901–1976）は，同僚がドイツを離れるなか自身は自国の文化を守ることを選択して留まったが，複数のアメリカの大学から教授職の提供を受けていた[6)]．必ずしも望み通りの人材が得られたわけではなかったにせよ，アメリカ側は，自分たちの必要に鑑みて適切な者を選ぶ主体性を確保していた．

現代物理学史では，1932 年が「奇蹟の年」と呼ばれることがある．これは，量子力学が 1920 年代後半に成立したのちに，その適用範囲をさらに広げる基礎となった 5 つの成果が，この年に発表されたためである．いずれも後にノーベル賞の対象となる 5 つの成果とは，中性子の発見，人工的な核分裂の成功，サイクロトロンの開発，重水素の発見，陽電子の発見であるが，このうち最後の 3 つはアメリカ人の業績であった（順に，ローレンス（Ernest Orlando Lawrence, 1901–1958），ユーリー（Harold Clayton Urey, 1893–1981），アンダーソン（Carl David Anderson, 1905–1991）による）[7)]．

奇蹟の年の 3 つの成果が物語る通り，アメリカは，物理学研究においては，大規模な知識人の亡命が始まる以前の 1930 年代初めに，すでにヨーロッパを超える存在になりつつあった．亡命物理学者が他国ではなくアメリカで研究の場を得るのに成功したのも，アメリカの中で他の分野に比べて物理学が亡命者により顕著な活躍の場を与えることができたのも，そのためであった．亡命による物理学者の大西洋を越えた移動は，ドイツ語圏の凋落とアメリカの隆盛の両方を同時にひきおこす出来事であり，これと，第二次大戦中の物理学

研究の躍進により，戦後のアメリカの物理学の世界の学界における位置は，ヨーロッパとの比較において，また名実ともに，向上した．では，1930年代までにアメリカの物理学の成長を牽引したのは何だったのであろうか．

16.3 第一次大戦後のアメリカの物理学の成長

アメリカをヨーロッパに並ぶ物理学研究の中心地にしたのは，第一次大戦後に起こった，科学研究・教育の躍進を目指した動きであり，これは，科学者の意識的な行動と，ロックフェラー，カーネギー，グッゲンハイムなどの財団による支援によって具体化した．

科学者の側では，第一次大戦中（ただしアメリカは参戦前）の1916年に，戦備（Preparedness. 参戦前の準備をこう呼ぶ）への協力を目指して，科学アカデミー（National Academy of Sciences）を母体とする学術研究会議（National Research Council: NRC）が結成された．天文学者のヘール（George Ellery Hale, 1868–1938）の主導によるものであり，物理学者のミリカン（Robert Andrews Millikan, 1868–1953），化学者のノイズ（Arthur Amos Noyes, 1866–1936）らが協力したほか，アメリカ電話電信会社のカーティー（John Joseph Carty, 1861–1932）やジュエット（Frank B. Jewett, 1879–1949）など産業界の技術者・科学者も加わった[8]．

大戦中，NRCは，科学者が軍や企業と協力して戦時研究を行うための調整にあたり，潜水艦探知，弾道計算，航空機の改良などで具体的な成果を挙げることに成功した．戦後には，大統領の諮問に応える機関としての地位を確立し，戦時中に引き続いて企業との協力の下に科学研究の応用の拡大に努めたほか，諸財団からの寄附を，大学での研究所設立や，奨学金制度の発足，学術誌の刊行などに振り向け，純粋科学の領域においても研究・教育の活性化を促進した．

一方，19世紀末の「金ぴか時代」（Gilded Age）の石油業界・鉄鋼業界などの成功に基づいて，カーネギー，ロックフェラー等が築き上げた財は，第一次大戦前には，医療・衛生・教育など，支援の理由を一般社会に説明するのが容易な対象に振り向けられていた．この姿勢が変化するのは第一次大戦を契機としてであり，それは，科学研究が実践的な役割を果たし得ることが明らかになり，また戦後の世界の復興にも役立ち得ると確信されたためであった[9]．諸財団は初めはNRCを通じて，次いで独自にも科学研究への援助を行うようになる．

財団の中でもロックフェラーの支援は突出しており，1924年から29年の間に，この財団の一般教育部（General Education Board: GEB）が国内の大学に行った援助は，自然科学関連のみで1,200万ドルに達した．支援の特徴は，一部の優れた大学に厚く資金を提供する（“Making the peaks higher”）というものであり，上述の期間に，ヘールやミリカンの所属するカリフォルニア工科大学に281万5千ドル，プリンストン大学に200万ドル，シカゴ大学に179万8千ドルが与えられるなど，上位6大学が総額の4分の3以上を受け取った[10]．支援は，研究施設の建設や基金創設にあてられた．例えばプリンストンでは，ロックフェラーからの寄附に自助努力分が加えられて300万ドルの基金が設けられ，その半分ずつが5人の教授の給与と研究助成金に用いられた．

16.4 科学への支援と量子力学の導入

第一次大戦後のアメリカにおける科学支援の隆盛は，科学分野の研究・教育全般の活性化をもたらしたが，量子力学の導入には特に大きく貢献した．

量子力学を築いた人々の中にアメリカ人はほとんどいないが，あえて挙げるとすれば，前期量子論の最後期に現れるBKS理論（1924年）のスレーター（John Clarke Slater, 1900–1976）くらいであろうか．BKSとは共同研究を行った3人の物理学者の姓の頭文字であり，最後のSがスレーター，Bはボーア（Niels Henrik David Bohr, 1885–1962），Kはクラマース（Hendrik Anthony Kramers, 1894–1952）を意味する．ボーアやクラマースとの共同

研究は，スレーターにとって極めて不愉快な経験であったが[11]，ヨーロッパが物理学研究の最先端にある以上は，そこに追いつくために留学が不可欠であるように思われた．スレーターはハーヴァードの物理学科で博士号を取得しており，実際にはアメリカで学んだ内容で充分ヨーロッパの水準に追いつくことができたのであったが——BKS 理論は発表後すぐに否定されたが，ボーアとクラマースに抵抗してスレーターが主張した点のみは結果的に正しかった——，そのことを確認するためにも留学する必要があった．

「奇蹟の年」1932 年に現れた 5 つの成果はいずれも実験研究に属するものであった．このうち 3 つがアメリカでなされ，量子力学の誕生後，わずか数年で，この理論の誕生に貢献しなかった国が研究の先端に到達したのは，理論研究の方向性がいったん固まり（相対論との整合性，原子核，物性など），実験上の成果が求められる段階が到来したためであった．アメリカは第一次大戦前から実験研究においては一定の水準には達しており，量子力学誕生後に最も早く成果を挙げたのも実験研究においてであった．

一方，量子論（1900 年），相対性理論（1905 年，1915 年），量子論的原子模型（1913 年）などの登場により，ニュートン力学の誕生以降揺らぐことのないように見えた物理学の基礎理論に大きな変革の兆しが現れた頃から，ドイツ語圏を中心に，世界の物理学者全体の関心は理論へと移っていった．さらに，理論の高度化により，実験を行いながら理論研究の動向を追うことは困難になり，実験を行わず理論研究のみに従事する研究者の集団が，国境を越えて成立することとなった．

アメリカは，第一次大戦による情報の途絶などもあって，理論研究確立の国際的な流れから取り残されていた．大戦後，アメリカの物理学者がまず目指したのは，ヨーロッパで生れた新たな理論上の成果を吸収した上で新たな貢献を成し得る理論研究者の育成と，理論研究の拠点の形成であった．アメリカの物理学が「成年に達する」[12]ためには，理論研究が，とくに量子論の領域において充実する必要があった．そして，第一次大戦後の研究支援体制の確立は，この方面において大きく貢献したのである．

前述のスレーターが博士号取得後に応募した奨学金の一つは，NRC の創設したものであり，博士号取得者を対象に年間 1,800 ドルが支給された．この額は，結婚は望めないが一人ならば生計は立てられるという程度である．1919 年の制度の創設から 1925–1926 年までに NRC の奨学金を得た若手の物理学者は 52 名に上り，支給総額は 20 万ドルに達した（1 人が複数年受給できる）[13]．それ以前には若手研究者が生活を維持するには教育を担当するのが通常であったが，この奨学金は彼らが研究に専念することを可能にした．

NRC の奨学金は，しかし，国内の研究機関への支援を目的としており，当初は留学に用いることはできなかった（この制限は 1926 年に解除される）．スレーターが留学時に獲得したのは，ハーヴァード大学が設けていた，渡航用のシェルダン奨学金（Sheldon Scholarship）であった．

理論研究の確立のために必要な若手研究者の留学を可能にしたのは，私設の財団が設けた奨学制度であった．特にロックフェラーは，1923 年に国際教育部（International Education Board: IEB）を設け，アメリカのみならず全世界の教育の発展と振興を目標に掲げた．IEB は，1929 年までに 100 万ドルを奨学金として費やしたが[14]，ヨーロッパ留学を望むアメリカ人物理学者の多くがこの奨学金によってこれを実現させた．

IEB の奨学金はアメリカでの研究を望む外国人にも支給された．ラポルテ（Otto Laporte, 1902–1971）やオルデンバーグ（Otto Oldenberg, 1888–1983）らは，この制度によって 1920 年代半ばにヨーロッパからアメリカに渡り，そのまま職を得ている．

ヨーロッパからの訪問者についていえば，著名な物理学者の訪問，具体的には講演旅行は，アメリカの研究者たちが先端の研究に関する情報を得るための重要な機会となった．ここでも第一次大戦後に科学界が享受した財政的援助が活用された．ボー

アは僅々２カ月の滞在によりアムハースト大学から3,000ドル，イェール大学から1,250ドルを受け取り，ゾンマーフェルト（Arnold Johannes Sommerfeld, 1868–1951）は1922年から1923年の冬の１学期の講義でウィスコンシン大学から4,000ドルを得た．ボルン（Max Born, 1882–1970）は，本務先はしばらく休みにして，アメリカでの講義を，ゲッティンゲンに家１軒を建てられるまで行おうとも考えたという[15]．訪問者たちが，最新の成果をアメリカでも普及させようという意欲に燃えていたことは間違いないであろうが，篤いもてなしにも関心は抱いたであろう．

NRCが調整し諸財団が提供した科学向けの巨額の資金の大半は，研究所の建設や研究用基金の創設などに振り向けられており，奨学金や渡航・招聘のための援助は小さな割合を占めるに過ぎない．しかし，当時のアメリカの物理学がヨーロッパの水準に達するために要したもの，すなわち量子力学における理論研究者の育成のためには，人間を介した知識や技能の吸収が不可欠であり，額は小さくとも，この点において，留学や招聘を可能にした財団等の支援が果たした役割は大きかった．

以上見たように，第一次大戦後のアメリカの物理学の急成長は，この時期に急速に高まった科学研究支援の機運によるところも大きいが，物理学者たちが，ヨーロッパを中心に起きた物理学上の変革（量子力学の誕生，理論物理学の確立）の流れに参加するという目的を明確にし，支援の効果が見えやすいようにこれを活用したことで実現したといえる．彼らが目的を明確にできたのは，それが，科学史上も数多くはない基礎理論と研究・教育の様態の転換（古典物理学から量子物理学への転換）に密接に関わるものであり，向かうべき先が明瞭だったためである．この目的の達成は，それ自体上述の転換の重要な一部を成していたが，僅かな期間の後に，物理学研究の中心地の大西洋を挟んだ移動と，第二次大戦中の原子爆弾の開発という，さらに特異な出来事が続いたために，アメリカにおける物理学の急成長が与える印象はより劇的なものとなった．

16.5 新しい理論への態度

アメリカでの量子力学の受容は，一群の理論研究者の誕生とともに進んだ．ヨーロッパでは，ニュートン力学とは異なる形態のこの基礎理論の物理的解釈について，1927年の第５回ソルヴェー会議以降，ボーアやアインシュタインといった物理学者たちが議論を闘わせ，その結果，ボーア，ハイゼンベルク，パウリ（Wolfgang Ernst Pauli, 1900–1958）らのいわゆる「コペンハーゲン解釈」が提唱されるに至るなどの動きがあった．しかし，アメリカの物理学者たちの反応は，ヨーロッパの同僚たちのそれとはやや異なったようである．

量子力学に関する哲学的議論の中心人物の一人であったハイゼンベルクは，1929年，ライプツィヒへの赴任前に講演旅行を行うためアメリカに上陸したが，そこで出会った反応は次のようなものであった．「ヨーロッパにおいては，新しい原子理論の非直観的な傾向，粒子と波動概念の間の二重性，自然法則の純粋の統計的な性格などが，大抵は白熱した討論となり，ときとしては新しい考えが烈しく拒絶されるという結果を導くことがあるのに，大部分のアメリカの物理学者は，これといった障害もなく新しい考え方をむしろ進んで受け入れ，明らかに彼らには少しも困難を生じえないように見える」[16]．ヨーロッパで見られた，新たな物理理論は，現実の世界の理解に関して何を意味するのかといった問題をめぐる議論は，アメリカでは関心を持たれず，抵抗や拒絶のないまま理論が受容されていたという観察である．物理学・科学の役割や意義についての基本的な了解が，大西洋の両岸で異なっていたことを窺わせる．

実際，量子力学を用いた研究を担ったアメリカの物理学者たちは，後年，理論の物理的解釈をめぐる論争を振り返って，以下のように述べている．「多くの『悪しき』哲学がはびこっていた」（オッペンハイマー）；「理論に特に心配はなく」（ポーリング（Linus Carl Pauling, 1901–1994））；「哲学には関心がなかった」（ヴァンヴレック（John Hasbrouck Van Vleck, 1899–1980））；「コモやソ

ルヴェーの哲学は不要な騒ぎで『完全にヨーロッパ的現象』であった」(スレーター)[17]．哲学的議論に無関心であるのみならず，それは不要で有害であるとも感じていたようである．

具体的な量子力学の利用にあたっては，例えば計算の結果得られる波動関数をどのように用いるかといった問題が生ずる．これについては，アメリカの物理学者たちの多くが，波動関数は多数の粒子 (例えば電子) の統計的なふるまいの記述であるという，ボルンの「統計的解釈」を適用した[18]．この解釈の前提には，個々の粒子のふるまいは決定論的である（確率的に予言できるというのではなく，確定している）という理解があり，個々の粒子のふるまいも確率的にのみ予言できるとするコペンハーゲン解釈とこの点で異なる．両者の相違は，微視的な領域での物理的実在が実際にどのようなものであるかを問題にする際には重大であるが，この当時の実験が関わる現象を論ずる際には，現実的には大きな問題は生じず，実験結果の整合的な説明のためには統計的解釈があれば十分であった．それでも，「自然」や「実在」に関心がある者であれば，次の段階で，ではこの理論に従えば個々の電子のふるまいはどのようなものであると考えられるのかという問題に向かうのが自然であるようにも思われる．しかし，アメリカの物理学者たちは，こうした問題を取り上げないのみならず，そこに問題があると指摘する程度に注意を払うことも稀であった[19]．

研究論文では取り上げられない事項も，教科書ではある程度の紙数を割いて解説がなされることがある．アメリカでも，1920年代末以降，量子力学の教科書が出版されるようになり，そこではハイゼンベルクの不確定性関係や波動関数の物理的解釈といった問題も取り上げられることがあった．

例えば，コンドン（Edward Uhler Condon, 1902–1974）とモース（Philip M. Morse, 1903–1985）は，1929年刊行の英語で書かれたものとしては最初の量子力学の教科書[20]において，不確定性関係は座標と運動量の同時測定が不可能であるという実験的事実に即して理解すべきであると述べている．その上で，こうした態度に関して参考になるのは，ハーヴァード大学の高圧物理学の実験家，ブリッジマン（Percy Williams Bridgman, 1882–1961）の「操作主義」(Operationalism) であると指摘する．また，翌年刊行されたルーアーク（Arthur Edward Ruark, 1899–1979）とユーリーの『原子，分子，量子』[21]も，不確定性関係を論じた箇所では，これが操作主義的な物理量の定義付けに基づく概念であると述べている．

操作主義は現在では顧みられることのほとんどない科学論上の一つの見解であるが，量子力学受容期のアメリカでは，議論を実験と理論の関わりに限定し，哲学論議を回避するためにしばしば引用された．操作主義と量子力学との関わりは，例えば，ハイゼンベルクの “Die Bahn ensteht erst dadurch, das wir sie beobachten.”（軌道はまず我々がそれを観測するという事実を通して存在するに至る）という文章を，「電子軌道の操作的定義」と評したオッペンハイマーの言葉によって幾分は想像できる．科学において用いられる諸概念を，具体的な実験・観測の場に即して理解しようという操作主義の主張は，量子力学が提示する新奇性に引き寄せられ，物理学者が不慣れな思弁に陥ることを防ごうとする際に援用された．アメリカの物理学者が量子力学をめぐって哲学的議論を展開することは稀であったが，それを行う必要に迫られた際や，あるいは哲学的議論を退ける際には，操作主義に言及する場合が多かったのである．

16.6 操作主義を越えて

操作主義の代表的な主張は，「概念はこれと対応する一連の操作と同義である」(“the concept is synonymous with the corresponding set of operations.”[22]) というものであり，具体的には，例えば長さという概念は，長さを測定する操作によって定義されるという．

ブリッジマンは，特殊相対性理論における同時性の定義を吟味し，次元解析の効力と限界を具体的な物理量の測定に即して検討した上で，こうし

た着想に至っていたが，当時築かれつつあった量子力学は（操作主義の解説書である『現代物理学の論理』(*The Logic of Modern Physics*) は1926年に書かれ翌年刊行された)，彼の眼には，物理的操作に即して諸概念を定義するという，自身の理想そのものの方針に従う理論であるかのように映っていた．『現代物理学の論理』には，「新量子力学（1925年–1926年におけるハイゼンベルク，ボルン，およびシュレーディンガーの力学）により，電子の概念のように基本的な概念を物理的操作によって理解することの必要が力説され」[23]たという文章も見られ，若い世代の物理学者たちが，操作主義を量子力学を理解するための導きの糸であると捉えたのも無理はない．

量子力学の内実を理解するようになると，しかし，ブリッジマンは，操作主義についても，量子力学についても，従来とは大きく異なる見解を抱くようになった．操作主義は，概念を理解するために操作を用いるのではなく，概念を操作によって定義するというより強い主張であったが，いずれにしても，操作に基づく定義や解釈が概念の理解に明瞭さをもたらすことを期待して，ブリッジマンはこれを提唱していた．

『現代物理学の論理』執筆の時点ではブリッジマンは意識していなかったようであるが，上述の主張の基礎には，誰がどこでいつ行おうとも，ある確定した操作を行えば，その結果は同一のものになるという前提があった．操作の結果にあいまいさが残るのであれば，概念を操作で定義しても概念の不明確さは払拭されない．しかし，量子力学誕生後に現れたハイゼンベルクの不確定性関係に関わる議論は，具体的な測定の場に即して，微視的な領域の操作は，結果が確定できるような形態では実行できないという事実を明らかにした．操作による定義で概念の意味を確定させようとしたブリッジマンの意図は潰えることとなった．

また，ブリッジマンは，従来の科学において信奉されてきた因果性を，やはり操作に即して理解していた．具体的には，指定された操作を行えばその結果が同じものになることが，物理的世界において因果性が成り立つことの基盤であると理解しており，そうした操作によって定義された概念で科学を組み立てることにより，物理的世界の因果性を反映した理論が構築できると考えたのである．

ハイゼンベルクの不確定性関係の議論は，操作主義が依拠した操作の結果の一意性やそれに基づく因果性といった前提を突き崩したが，では量子力学がそれに変わる新たな物理的実在の記述に関わる指針を提示したかといえば，少なくともブリッジマンには，そうは見えなかった．量子力学が依拠している確率という概念は，無限回の試行や無限のサンプル数を前提としており，現実に実行可能であるという条件をもつ操作のみを科学において有効なものとみなすブリッジマンは，これを，物理的実在の記述に用いるには不適切であると判定したのである．

量子力学やハイゼンベルクの不確定性関係が提示する議論は，ブリッジマンには自然の法則性や理解可能性を否定するものであると思われたが，不確定性関係は具体的な測定の場面に基づく説得的なものであったために，彼はそれを受け入れざるを得なかった．受け入れた結果，ブリッジマンは，新たな理論は，神や自由意志，テレパシー，魂などの存在をも可能にするものであると述べるに至った[24]．量子力学の成立が操作主義の提唱者に与えた影響は深刻であった．

一方，ブリッジマンを引用して量子力学の理解を図ろうとしていた若手の物理学者たちは，操作主義の提唱者の新理論への反応に戸惑ったが，多くの者はこれを無視し，わずかに目をとめた者はこれは物理学 (physics) ではなく形而上学 (metaphysics) の課題であると判断した（例えばヴァンヴレック[25]）．彼らは，具体的な操作に即して理論を理解することの意味は認めたが，操作に基づく理論が物理的実在を記述するかどうかといった問題には関心を持たなかったのである．逆にいえば，ブリッジマンは，物理学が実在の記述であることを要請するという点で，同時代のアメリカの科学者の中では異質な存在であった．

実在の記述ではないとすれば，では物理学は一体

何であるのか．実験結果を再現する数学的な道具というあたりが量子力学世代のアメリカの物理学者の共通する認識であり，その道具が実在をうまく再現していると考えるのは，一種の「信仰」(faith) であると主張する者もあった[26]．無味乾燥なようではあるが，古典物理学から量子物理学への交代を通じて，物理学——あるいは科学——全体の性格の表現として残ったのは，こうした言い方であった．学問を論ずるにあたって，それが実在の表現であるか否かを当初から問題にしない態度は，例えばクーン (Thomas S. Kuhn, 1922–1996) のパラダイム論において顕著であるが，クーンの物理学研究を指導したのは，こうした科学観を量子力学の受容期に表明した物理学者たちの一人，ヴァンヴレックであった．アメリカにおける量子力学の受容については，制度面での成功が関心を集めがちであるが，上述のような科学観の転換も，目立たない形ではあれ，同時期に生じていたのである．

今回はアメリカにおける量子力学の受容を論じた．次回は同時期の日本での対応を検討する．

参考文献

1) Helge Kragh, *Quantum Generations* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1999), p.xii.
2) Daniel J. Kevles, *The Physicists* (Cambridge, Massachusetts, and London, England: Harvard University Press, 1987), p.341.
3) Kragh, *op. cit.*, 1), *Quantum Generations*, p.265.
4) ローラ・フェルミ著，掛川トミ子・野水瑞穂訳，『二十世紀の民族移動　2』，みすず書房，1972年，91ページ．
5) Roger L. Geiger, *To Advance Knowledge: The Growth of American Research Universities, 1900–1940* (Oxford University Press, 1986), p.242; Maurice R. Davie, *Refugees in America* (New York: Harper, 1947), pp.435–440.
6) David Cassidy, *Beyond Uncertainty: Heisenberg, Quantum Physics, and the Bomb* (New York, Bellevue Literary Press, 2009), p.293.
7) Charles Weiner, "1932-Moving into the New Physics," *Physics Today*, **25:5** (May 1972), pp.40–49.
8) Keveles, *op. cit.*, 2), *The Physicists*, pp.102–138.
9) Robert E. Kohler, *Partners in Science* (Chicago and London: The University of Chicago Press, 1991), pp.1–129.
10) Geiger, *op. cit.*, 5), *To Advance Knowledge*, p.162.
11) Takuji Okamoto, "Percy Williams Bridgman and the Establishment of Theoretical Physics at Harvard," *Historia Scientiarum*, **14:1** (2004), pp.1–48.
12) John H. Van Vleck, "American Physics Comes of Age," *Physics Today*, **17:6** (June 1964), pp.21–26.
13) Katherine Russell Sopka, *Quantum Physics in America, 1920–1935* (New York: Arno Press, 1980), p.2.11.
14) Geiger, *op. cit.*, 5), *To Advance Knowledge*, p.162.
15) Sopka, *op. cit.*, 13), *Quantum Physics in America*, p.2.21.
16) W.K. ハイゼンベルク著，山崎和夫訳，『部分と全体』(みすず書房，1986年)，153ページ．
17) Nancy Cartwright, "Philosophical Problems of Quantum Theory: The response of American Physicists," in Lorenz Krüger, Gerd Gigerenzer, and Mary S. Morgan, eds., *The Probabilistic Revolution*, **vol.2** (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1987), pp.417–435, p.419.
18) E.H. Kennard, "On the Quantum Mechanics of a System of Particles," *Physical Review*, **31** (1928), pp.876–890.
19) Cartwright, *op. cit.*, 17), "Philosophical Problems," p.420.
20) E.U. Condon and P.M. Morse, *Quantum Mechanics* (New York: MacGraw-Hill, 1929).
21) A.E. Ruark and H.C. Urey, *Atoms, Molecules and Quanta* (New York, MacGraw-Hill, 1930).
22) Percy Williams Bridgman, *The Logic of Modern Physics* (New York: Macmillan, 1927), p.5.
23) Bridgman, *op. cit.*, 22) *The Logic of Modern Physics*, p.222.
24) P.W. Bridgman, "The New Vision of Science," *Harper's Magazine*, **158** (1929), pp.443–451.
25) Van Vleck, *op. cit.*, 12), "American Physics Comes of Age," p.23.
26) K.K. Darrow, *Introduction to Contemporary Physics* (New York: D. Van Nostrand, 1926).

(おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科)

編集後記

今回の特集では理論と実験，二つの観点から物理の様々なテーマについて解説していただきました．お互いが切磋琢磨して発展してきた様子がみてとれたのではないでしょうか．

ところで，以前観たオペラで「オペラは言葉が先か音楽が先か」ということをテーマにしたものがあります．オペラの世界にも今回の特集と似たテーマがあると思うと様々な世界で同じようなことがありそうだと感じます．最終的にどちらが先かということは明確には示されないのですが，読者の皆さんはどのように思われますか．

ただ，実際に観てみなくとも今回の特集をひととおり目を通された方ならば，おのずと答のようなものがみえてくるのではないでしょうか．　(R)

＊　　＊

今回は物理の理論と実験の結びつきを特集しました．本誌では先端の話題を中心に取り上げましたが，基礎的な理論や実験は大学でも学ぶかと思います．学生時代の実験を振り返ると，提出日厳守のレポート執筆にはプレッシャーを感じましたが，考察を書いていると自分が研究者になったような感覚がして楽しかった記憶があります．しかし，理論と実験それぞれがどのように関わっているのかなど，当時は特に気にしていませんでした．

本特集では理論と実験がいかに関わって発展しているのか，理論家と実験家双方の視点から解説していただきました．発展の仕方は分野によってそれぞれのようですが，どの分野も理論・実験が協力して発展している様子がわかります．　(T)

数　理　科　学　11月号

2013年11月1日発行

数理科学編集部　　　発行人　木下敏孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社　サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁